И. Х. СИВАШИНСКИЙ

ЗАДАЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

И. Х. СИВАШИНСКИЙ

ЗАДАЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

15
С 34
УДК 510 (023)

Книга представляет собой сборник задач (в основном повышенной трудности) по элементарной математике, снабженных решениями или указаниями.

Этот задачник может быть использован прежде всего при подготовке к конкурсным экзаменам в вузы, особенно такие, в которых предъявляются повышенные требования по математике. Сборник может быть использован также в работе юношеских математических кружков, преподавателями и студентами педагогических вузов и для самообразования.

Израиль Хаимович Сивашинский

ЗАДАЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Москва, 1966 г., 512 стр. с илл.

Редакторы *А. П. Баева, Н. Н. Дегтярев.*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше.* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 27/I 1966 г. Подписано к печати 23/V 1966 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 16. Условн. печ. л. 26,88. Уч.-изд. л. 25,89. Тираж 100 000 экз. Т-08206. Цена книги 82 коп. Заказ №132

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-54, Валовая, 28

2-2-2
51 66

ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВИЯ

Глава I.	Делимость чисел. Теорема Безу	5
Глава II.	Преобразования в алгебре	10
Глава III.	Алгебраические уравнения и системы уравнений	14
Глава IV.	Неравенства в алгебре. Наибольшие и наименьшие значения	23
Глава V.	Задачи на составление уравнений	32
Глава VI.	Прогрессии и суммы	37
Глава VII.	Основные свойства логарифмов. Показательные и логарифмические уравнения	44
Глава VIII.	Комбинаторика и бином Ньютона	47
Глава IX.	Комплексные числа	49
Глава X.	Задачи по планиметрии на вычисление	50
Глава XI.	Задачи по планиметрии на доказательство . .	53
Глава XII.	Задачи по планиметрии на нахождение геометрических мест	60
Глава XIII.	Задачи по планиметрии на построение	62
Глава XIV.	Задачи по стереометрии	64
Глава XV.	Неравенства в геометрии. Наибольшие и наименьшие значения	68
Глава XVI.	Преобразования в тригонометрии	74
Глава XVII.	Тригонометрические уравнения и системы уравнений	78
Глава XVIII.	Неравенства в тригонометрии. Наибольшие и наименьшие значения	84

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

Глава I.	Делимость чисел. Теорема Безу	91
Глава II.	Преобразования в алгебре	109
Глава III.	Алгебраические уравнения и системы уравнений	123
Глава IV.	Неравенства в алгебре. Наибольшие и наименьшие значения	163
Глава V.	Задачи на составление уравнений	207
Глава VI.	Прогрессии и суммы	225
Глава VII.	Основные свойства логарифмов. Показательные и логарифмические уравнения	253
Глава VIII.	Комбинаторика и бином Ньютона	263
Глава IX.	Комплексные числа	270
Глава X.	Задачи по планиметрии на вычисление	274
Глава XI.	Задачи по планиметрии на доказательство	294
Глава XII.	Задачи по планиметрии на нахождение геометрических мест	334
Глава XIII.	Задачи по планиметрии на построение	345
Глава XIV.	Задачи по стереометрии	362
Глава XV.	Неравенства в геометрии. Наибольшие и наименьшие значения	388
Глава XVI.	Преобразования в тригонометрии	422
Глава XVII.	Тригонометрические уравнения и системы уравнений	438
Глава XVIII.	Неравенства в тригонометрии. Наибольшие и наименьшие значения	472

Глава I

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМА БЕЗУ

1. Показать, что при всяком нечетном значении n число вида $n^4+7(7+2n^2)$ делится на 64.

2. Доказать, что если n — число простое, отличное от 2 и 3, то разность n^2-1 делится на 24.

3. Доказать, что сумма квадратов двух чисел, взаимно простых с числом 3, не делится на 3.

4. Показать, что при всяком целом n число $n(n^2+5)$ делится на 6.

5. Доказать, что выражение n^5-5n^3+4n при любом целом n делится без остатка на 120.

6. Доказать, что если n взаимно простое с 6, то n^2-1 делится на 24.

7. Доказать, что при всяком целом значении n число вида $n^4+6n^3+11n^2+6n$ делится на 24.

8. Доказать, что $6^{2n}-1$, где n — любое натуральное число, делится на 35.

9. Доказать, что при n целом числа вида $7^{n+2}+8^{2n+1}$ делятся на 57.

10. Доказать, что если n есть целое, не кратное пяти число, то выражение

$$(11^{2n}-2^{6n})(n^4-1)$$

делится на 285.

11. Показать, что

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$$

при любом целом неотрицательном n делится на 23.

12. Доказать, что числа вида

$$2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}$$

при n целом и неотрицательном кратны 37.

13. Доказать, что выражение

$$3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}$$

кратно 19 при любом целом неотрицательном n.

14. Найти общий наибольший делитель чисел вида

$$7^{n+2}+8^{2n+1},\ \text{где}\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

15. Доказать, что выражение

$$2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}$$

при любом целом неотрицательном n кратно 17.

16. Доказать, что числа вида

$$3\,(5^{2n+1}+3^{4n-5})+2^{3n}\,(2-2^{3n-6})$$

при любом целом положительном значении n кратны 17.

17. Доказать, что

$$3^{2(n+1)}\cdot 5^{2n}-3^{3n+2}\cdot 2^{2n}$$

при любом целом неотрицательном n делится на 1053.

18. Доказать, что число

$$5^{2n+1}+3^2\cdot 2^{n+1}\,(1+18^{n-1})-13^n$$

при любом целом положительном n делится на 46.

19. Доказать, что сумма $222^{333}+333^{222}$ делится на 13.

20. Доказать, что сумма $3^{105}+4^{105}$ делится на 13, на 181 и на 7.

21. Доказать, что выражение $4^n+15n-1$ делится на 9 при любом натуральном n.

22. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число

$$3^{2n+2}\cdot 4+32n-36$$

делится на 64.

23. Доказать, что выражение

$$3^{2n+1}\cdot 4^{4n+1}+3^{6n+2}+4^{n+1}$$

при любом целом неотрицательном n кратно 25.

24. Доказать, что число $3^{2n+2}-8n-9$ при n целом неотрицательном кратно 64.

25. Доказать, что выражение $1+2^x+4^x$ кратно 7, если x — положительное число вида $3n\pm 1$.

26. Доказать, что $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ кратно 11 при всех целых положительных значениях n.

27. Определить, при каких целых неотрицательных значениях x

$$7^{3x}-4\cdot 3^{2x}+3\cdot 2^x$$

делится на 11.

28. Доказать, что выражение $1+3^n+9^n$ делится на 13, если $n=3k+1$, где k — любое натуральное число.

29. *Схема Горнера.* При делении многочлена

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

на двучлен $x-a$ в частном получается многочлен степени $n-1$

$$B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots+B_{n-2}x+B_{n-1},$$

а в остатке — некоторое число R.

Показать, что коэффициенты B_0, B_1, B_2, ..., B_{n-2}, B_{n-1} и остаток R вычисляются последовательно так:

$$B_0=A_0;\ B_1=B_0a+A_1;\ B_2=B_1a+A_2;\ B_3=B_2a+A_3;\ \ldots$$
$$\ldots;\ B_{n-1}=B_{n-2}a+A_{n-1};\ R=B_{n-1}a+A_n.$$

30. Доказать, что многочлен

$$f(x)=n^2\cdot x^{n+2}-(2n^2+2n-1)\,x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1$$

делится на $(x-1)^3$.

31. Доказать, что многочлен

$$A=nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1$$

делится без остатка на $(x-1)^2$.

32. Доказать, что если многочлен $f(x, y)$, симметричный относительно x и y, делится на $(x-y)$, то он делится и на $(x-y)^2$.

33. При каких значениях a, b, c многочлен x^5+ax^2+bx+c разделится без остатка на $(x+1)^3$?

34. Доказать, что при нечетном n сумма

$$S_m=1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n+m^n$$

делится на $1+2+3+\ldots+(m-1)+m$.

35. Пусть m — данное целое положительное число. Доказать, что многочлен

$$f(x)=(x-2)^{2m}+(x-1)^m-1$$

делится на произведение $(x-1)(x-2)$. Найти частное.

36. Доказать, что число

$$(a+1)^{2n+1}+a^{n+2},$$

где a — целое, а n — целое неотрицательное число, делится на a^2+a+1.

37. Найти целое выражение, тождественно равное сумме

$$S=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)},$$

где n — натуральное число.

38. При каких значениях n многочлен

$$A=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}$$

разделится без остатка на многочлен

$$B=1+x+x^2+\ldots+x^n?$$

39. Найти общий вид многочлена, произведение которого на двучлен x^2-1 содержит лишь два члена.

40. Доказать, что если разность, полученная от вычитания числа, выраженного тремя последними цифрами данного числа, из числа, выраженного всеми остальными его цифрами (или наоборот), делится на 7, или на 11, или на 13, то все данное число делится соответственно на 7, или на 11, или на 13; если эта разность равна 0, то данное число делится и на 7, и на 11, и на 13 (*признак делимости на* 7, 11, 13).

41. Доказать, что число $1+4rq$, где r равно разности между произведением и общим наибольшим делителем некоторых двух чисел, а q равно отношению общего наименьшего кратного и общего наибольшего делителя тех же двух чисел, есть точный квадрат.

42. Доказать, что сумма квадратов двух целых чисел a и b делится на 7 только тогда, когда каждое из них делится на 7.

43. Доказать, что если $mn+pq$ делится на $m-p$, то $mq+np$ тоже делится на $m-p$.

44. Какое число надо прибавить к выражению

$$(n^2-1)^p(n-1)^{p+1},$$

чтобы оно делилось на n?

45. Показать, что если $6x+11y$ делится на 31, то $x+7y$ также делится на 31.

46. Найти наименьшее положительное число, кратное 7, которое при делении на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6 дает в остатке единицу.

47. Найти двузначное число, которое при делении на цифру единиц дает в частном также цифру единиц, а в остатке цифру десятков.

48. Показать, что квадрат любого нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1.

49. Разложить на множители выражение

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5.$$

50. Доказать, что дробь $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ несократима ни при каких натуральных значениях a.

51. Доказать, что если m и n — два числа, не делящиеся на 3, то число

$$(m-n)(m^2-mn+n^2)(m^3+2m^2n+2mn^2+n^3)$$

делится на 9.

52. Найти двузначное число, наименьший делитель которого, отличный от единицы, равен сумме цифр искомого числа.

53. Дано, что ни A, ни B не делятся на нечетное простое число p и что A^2-B^2 делится на p^n, где n — целое положительное число. Доказать, что или сумма, или разность чисел A и B делится на p^n.

54. Доказать, что (m^p-m) при любом m и простом p делится на p (*«малая» теорема Ферма*).

55. Найти остаток от деления на 13 выражения $7^{100}+11^{100}$.

56. Доказать, что если a есть целое число, взаимно простое с 35, то произведение

$$(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$

делится на 35.

57. Найти такое простое число a, чтобы число $5^{a^2}+1$ делилось на a^2.

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В АЛГЕБРЕ

58. Доказать, что

$$a^3+b^3+c^3=3abc,$$

если $a+b+c=0$.

59. Доказать, что

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

если $a+b+c=0$.

60. Доказать, что

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

если $a+b+c=0$.

61. Показать, что из равенства

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,$$

где a, b, c — вещественные числа, следует, что $a=b=c$.

62. Доказать, что

$$(a+b+c)^3=27abc,$$

если $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$.

63. Показать, что из равенства

$$\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)},$$

где x, y, z не равны между собой и $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, вытекает равенство

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

64. Показать, что

$$xy+xz+yz=0,$$

если

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\quad a+b+c=1,\quad a^2+b^2+c^2=1.$$

65. Доказать, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

если

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$$

66. Доказать, что

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0,$$

если

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0, \quad a\neq b, \quad a\neq c \quad \text{и} \quad b\neq c.$$

67. Показать, что при нечетном n из равенства $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$ следует равенство

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}.$$

68. Показать, что если

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 &= p^2, \\ b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2 &= q^2, \qquad (p\neq 0, \quad q\neq 0) \\ a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n &= pq, \end{aligned}$$

то

$$a_1=\lambda b_1, \quad a_2=\lambda b_2, \quad \ldots, \quad a_n=\lambda b_n,$$

где $\lambda=\frac{p}{q}$. (Все величины предполагаются вещественными.)

69. Доказать, что если $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$ и

$$A=\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0,$$

то и

$$B=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0,$$

и наоборот, если $B=0$, то и $A=0$.

70. Из соотношений

$$\lambda=\frac{\frac{m}{(a-b)^2}+\frac{n}{(a+c)^2}}{a}=\frac{\frac{n}{(b+c)^2}-\frac{l}{(a-b)^2}}{b}=\frac{\frac{l}{(a+c)^2}+\frac{m}{(b+c)^2}}{c},$$

в которых числители и знаменатели отличны от нуля, вывести равенства

$$al+bm=cn \quad \text{и} \quad \frac{a}{(b+c)^2}=\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

71. Упростить выражение

$$A=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2-$$
$$-(x^2+x^{-2n})(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1).$$

72. Упростить выражение

$$A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

73. Упростить выражение

$$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}.$$

74. Дано

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}.$$

Вычислить произведение $(x+1)(y+1)$.

75. Упростить выражение

$$A=\left[1+\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2\right]\left[1+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2\right].$$

76. Доказать, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n\neq 0$ и

$$A=\frac{a_1+a_2x}{a_1+a_2y}=\frac{a_2+a_3x}{a_2+a_3y}=\ldots=\frac{a_{n-1}+a_nx}{a_{n-1}+a_ny}=\frac{a_n+a_1x}{a_n+a_1y},$$

то

$$A=\frac{1+x}{1+y}.$$

77. Упростить выражение

$$y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}.$$

78. Упростить выражение

$$(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}).$$

79. Упростить выражение

$$(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\ldots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}\cdot x^{2^{n-1}}+a^{2^n}).$$

80. Разложить на множители

$$A=a^4+4b^4.$$

81. Разложить на множители

$$A = a^{5n} + a^n + 1 \quad (n \text{ натуральное}).$$

82. Разложить на множители выражение

$$A = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15.$$

83. Разложить на множители выражение

$$A = \sqrt[3]{a^2b^4} + \sqrt[3]{b^2c^4} + \sqrt[3]{a^4c^2} - (\sqrt[3]{b^4c^2} + \sqrt[3]{a^2c^4} + \sqrt[3]{a^4b^2}).$$

84. Разложить на множители выражение

$$y^3(a-x) - x^3(a-y) + a^3(x-y).$$

85. Расположить многочлен $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ по степеням $(x+1)$.

86. Найти значение выражения

$$z = x^3 - 3x - 2\frac{A^2+B}{A^2-B}$$

при

$$x = \sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}.$$

87. Найти значение выражения

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}\right)$$

при

$$x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}},$$

если p и q — любые рациональные числа и дробь $\frac{a+b}{a-b}$ положительна.

88. Найти значение выражения

$$A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}\,\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} - mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\,\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} + mx} : \sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}$$

при

$$x = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{2m}{n} - 1} \qquad (0 < m < n < 2m).$$

89. Доказать, что если

$$a^m + a^n = a^p + a^q \quad (a \neq 0,\ a \neq \pm 1)$$

и

$$a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q} \quad (a\neq 0,\ a\neq \pm 1),$$

то

$$m\cdot n=p\cdot q.$$

90. Доказать, что если

$$a^3+pa+q=0, \quad b^3+pb+q=0$$

и

$$c^3+pc+q=0 \quad (a\neq b,\ a\neq c,\ b\neq c),$$

то $a+b+c=0$.

91. Показать, что если уравнения

$$x^3+px+q=0 \text{ и } x^3+p_1x+q_1=0$$

имеют общий корень, то имеет место соотношение

$$(q-q_1)^3=(p-p_1)^2(pq_1-p_1q).$$

92. Корни уравнения

$$mx^2+nx+n=0 \quad (m>0,\ n>0)$$

относятся как $p:q$ $(p>0,\ q>0)$. Показать, что при соответствующем выборе знаков радикалов имеет место равенство

$$\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{q}{p}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{n}{m}}=0,$$

где ε, ε_1 и ε_2 могут принимать значения $+1$ или -1.

Глава III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

93. Доказать, что если обе части уравнения $f(x)=\varphi(x)$ возвысить в квадрат, то полученное уравнение

$$[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2$$

будет иметь своими корнями все корни данного уравнения $f(x)=\varphi(x)$ и корни уравнения $f(x)=-\varphi(x)$.

94. Доказать, что если между коэффициентами двух уравнений

$$x^2+2px+q=0 \text{ и } x^2+2p_1x+q_1=0$$

существует зависимость $q+q_1=2pp_1$ и корни одного из этих уравнений мнимые, то корни другого — вещественные.

95. Доказать, что если уравнение с двумя неизвестными

$$ax^2+bxy+cy^2=0,$$

где a, b, c — действительные числа, имеет только одно решение, т. е. существует только одна пара действительных значений x и y, удовлетворяющих этому уравнению, то

$$b^2-4ac<0.$$

96. Доказать, что если алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами имеет корень $a+b\sqrt{c}$, где a, b и c — рациональные числа, b и c отличны от нуля и c не равно квадрату рационального числа, то это уравнение имеет и корень $a-b\sqrt{c}$.

97. Доказать, что если уравнение n-й степени с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они являются делителями свободного члена.

98. Доказать, что если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами имеет рациональные корни, то эти корни являются целыми числами.

99. Доказать, что если все коэффициенты квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ — целые нечетные числа, то корни этого уравнения не могут быть рациональными.

100. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, ..., x_n являются корнями целой рациональной функции

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

то имеют место следующие формулы:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_{n-2}x_n=-\frac{a_3}{a_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Эти формулы называются *формулами Виета.*

101. Числа α и β ($\alpha \neq \beta$) являются корнями уравнения $x^3+px+q=0$ и удовлетворяют равенству $\alpha\beta+\alpha+\beta=0$. Найти соотношение между p и q и выразить третий корень через α и β.

102. Найти все корни уравнения

$$x^2+\frac{25x^2}{(5+2x)^2}-\frac{74}{49}=0.$$

103. Решить уравнение $x^5+1=0$.

104. Решить уравнение $x^4-8x+63=0$.

105. Найти все четыре корня уравнения

$$15x^4-4x^3-6x^2-4x-1=0.$$

106. Решить уравнение $8x^4+8x^3-x-190=0$.

107. Решить уравнение $(8x+7)^2\cdot(4x+3)(x+1)=4{,}5$.

108. Решить уравнение

$$(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0,$$

где a — действительное число.

109. Решить уравнение $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$.

110. Найти все корни уравнения

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=1.$$

111. Решить уравнение

$$(x-4)^3(x-5)^3+2(x-5)^3+(x-4)^3=0.$$

112. Решить уравнение

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1.$$

113. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt[4]{x+1}+\frac{\sqrt[4]{x+1}}{x}=\sqrt[4]{243x}.$$

114. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{2x}.$$

115. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{3x-2}=2\sqrt{x}.$$

116. Решить уравнение

$$x^2-4x\sqrt{x+1}+8x-8\sqrt{x+1}+8=0.$$

117. Найти действительные корни уравнения

$$(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1.$$

118. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt[5]{1+2x}+\sqrt[5]{1-2x}=\sqrt[5]{2}.$$

119. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[5]{3+x}}{3}+\frac{\sqrt[5]{3+x}}{x}=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x}.$$

120. Решить уравнение

$$|x-1|+|x-2|=1.$$

121. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7.$$

122. Найти действительные корни уравнения

$$x^2-5x-4\sqrt{x}+13=0.$$

123. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{x^2-1}.$$

124. Найти все корни уравнения

$$x^4-6ax^2+8a\sqrt{a}\,x-3a^2=0.$$

125. Решить уравнение

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}}-\frac{1}{2c}\left(\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}\right)=0.$$

126. Найти действительные корни уравнения

$$2x\sqrt[3]{x}-4x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=6.$$

127. Решить уравнение

$$(x^2-px+q)^2+(x^2+px+q)^2=x^2.$$

128. Решить уравнение

$$x^4+(2a-1)x^3+(a^2+1)x^2+(a^2-2a)x+a^2=0.$$

129. Найти действительные корни уравнения

$$(x^2+6x-11)\sqrt{x-2}=5x^2-10x+1.$$

130. Найти действительные корни уравнения

$$x^2-6x+y-4\sqrt{y}+13=0.$$

131. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5.$$

132. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{8a}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4}}-\frac{a}{2}.$$

133. Найти все корни уравнения

$$x^3+2x-5\sqrt{3}=0.$$

134. Составить трехчленное уравнение восьмой степени с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

135. Показать, что уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$$

не имеет решений.

136. В каком промежутке должно изменяться число m, чтобы оба корня уравнения

$$x^2-2mx+m^2-1=0$$

были заключены между -2 и 4.

137. Найти действительные пары чисел, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}-28=0.$$

138. Найти в целых числах длины сторон прямоугольного треугольника, периметр и площадь которого выражаются одним числом.

139. Уравнение $4x^2y(x^2y-x+1)=15x^3+2x-1$ решить в целых числах.

140. Найти пять последовательных натуральных чисел, если известно, что сумма их обратных чисел равна 1,45.

141. Уравнение $x^x + y^y = 2x + y$ решить в целых положительных числах.

142. Решить в целых числах уравнение

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2.$$

143. Доказать, что уравнение $x! + y! = 10z + 9$ не имеет решений в целых числах.

144. Показать, что уравнение

$$y(10x^2 + 21y^5 - 30z^3) = 578$$

не имеет целых решений.

145. Решить в целых числах уравнение

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + x)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + x^2) = y^2.$$

146. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 100 = 225y.$$

147. Решить в целых числах уравнение

$$10x + y = (x + y)^2.$$

148. Решить в целых числах уравнение

$$xy - 10(x + y) = 1.$$

149. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1, \\ y + z - x = 3. \end{cases}$$

150. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x + 1| + |y - 1| = 5, \\ |x + 1| = 4y - 4. \end{cases}$$

151. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 420, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 280. \end{cases}$$

152. Найти все значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x - y = m(1 + xy), \\ 2 + x + y + xy = 0 \end{cases}$$

имеет действительные решения.

153. Найти все те значения a, при которых уравнения

$$x^2+ax+1=0 \quad \text{и} \quad x^2+x+a=0$$

имеют общий корень.

154. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n = a_1, \\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\ldots+(n-1)x_n = a_2, \\ (n-1)x_1+nx_2+x_3+2x_4+\ldots+(n-2)x_n = a_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\ldots+x_n = a_n. \end{cases}$$

155. Определить k так, чтобы система

$$\begin{cases} x+(1+k)y = 0, \\ (1-k)x+ky = 1+k, \\ (1+k)x+(12-k)y = -(1+k) \end{cases}$$

была совместна.

156. Дана система

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Доказать, что уравнения совместны, и определить x, y и z.

157. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (b+c)(y+z)-ax=b-c, \\ (c+a)(z+x)-by=c-a, \\ (a+b)(x+y)-cz=a-b, \end{cases}$$

если $a+b+c\neq 0$.

158. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$$

159. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y, \\ x^4-y^4=144a^4. \end{cases}$$

160. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4=b^4 \\ x+y=a \end{cases} \quad (a\neq 0,\ b\neq 0),$$

и исследовать решение.

161. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$$

162. Найти положительные решения системы

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^m\left(\frac{y}{b}\right)^n=c, \\ \left(\frac{x}{b}\right)^n\left(\frac{y}{a}\right)^m=d, \end{cases}$$

если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ и $m\neq n$.

163. Найти действительные корни системы уравнений

$$\begin{cases} x^2-12y=15, \\ \frac{x^2}{8y}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}-\frac{y}{2}. \end{cases}$$

164. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=1, \\ x_1+x_3+x_4+\ldots+x_n=2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}=n. \end{cases}$$

165. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=a_1, \\ x_2+x_3=a_2, \\ x_3+x_4=a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}+x_n=a_{n-1}, \\ x_n+x_1=a_n. \end{cases}$$

166. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+a)(y+l) = (a-n)(l-b), \\ (y+b)(z+m) = (b-l)(m-c), \\ (z+c)(x+n) = (c-m)(n-a). \end{cases}$$

167. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (c+a)y + (a+b)z - (b+c)x = 2a^3, \\ (a+b)z + (b+c)x - (c+a)y = 2b^3, \\ (b+c)x + (c+a)y - (a+b)z = 2c^3 \end{cases}$$

при условии $b+c \neq 0$, $a+c \neq 0$, $a+b \neq 0$.

168. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_2 x_3 \ldots x_n}{x_1} = a_1, \\ \dfrac{x_1 x_3 \ldots x_n}{x_2} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n, \end{cases}$$

предполагая, что числа $a_1, \ldots, a_n$ и $x_1, \ldots, x_n$ положительны.

169. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2 \end{cases} \qquad (a > 0).$$

170. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z = 2, \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1, \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6. \end{cases}$$

171. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1 + \dfrac{2}{x_1}, \\ 2x_3 = x_2 + \dfrac{2}{x_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_n = x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1 = x_n + \dfrac{2}{x_n}. \end{cases}$$

172. Выяснить, при каком значении a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

имеет единственное вещественное решение, и найти это решение.

173. Решить систему

$$\begin{cases} |x+1|+|y-4|=2, \\ |x+1|+4-y=0. \end{cases}$$

174. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3, \\ xyz=2. \end{cases}$$

Глава IV

НЕРАВЕНСТВА В АЛГЕБРЕ. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

175. При каком a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2-(a-2)x-a-1=0$$

принимает наименьшее значение.

176. Найти, при каких значениях x и y выражение $A=x^2+2xy+2y^2+2x+4y+3$ принимает наименьшее значение.

177. Доказать неравенство

$$M=x^2+4y^2+3z^2+14-2x-12y-6z>0.$$

178. Доказать, что

$$x^2+y^2+z^2+u^2+a^2+a(x+y+z+u)\geqslant 0.$$

179. Сравнить по величине выражения x^3+1 и x^2+x, где x действительное.

180. Каково должно быть k, чтобы при любых x значение функции

$$x^2+(3k+1)x+3k$$

было больше значения функции

$$(k+1)x^2+4kx-4k.$$

181. Доказать, что $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$; если $a+b\geqslant 1$.

182. Доказать, что $a^8+b^8\geqslant\frac{1}{128}$, если $a+b\geqslant 1$.

183. Доказать неравенство

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd},$$

где a, b, c и d положительны.

184. Доказать неравенство

$$a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b.$$

185. Доказать, что если $n\geqslant k\geqslant 1$, то

$$k(n-k+1)\geqslant n.$$

186. Доказать, что $\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n}$.

187. Доказать неравенство

$$a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\geqslant 6a^2b^2,$$

если $a\cdot b\geqslant 0$.

188. Доказать неравенство

$$b^2+a^4-ab\geqslant a^3b+4a^2b$$

при условии $ab\leqslant 0$.

189. Показать, что если a, b, c — стороны треугольника, то при любом значении x трехчлен

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

положителен.

190. Доказать неравенство $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, если $a+b\geqslant 0$.

191. Доказать, что если $a+b>0$, то $\frac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$, где n — целое положительное.

192. Доказать, что $|ac-bd|\leqslant 1$, если $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$.

193. Доказать, что если $a^2+b^2+c^2=1$ и $m^2+n^2+p^2=1$, то

$$|am+bn+cp|\leqslant 1.$$

194. Доказать неравенство

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

195. Доказать неравенство

$$|\alpha+\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|.$$

196. Доказать неравенство

$$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|.$$

197. Доказать, что

$$-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n\leqslant 1,$$

если $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$ и $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$.

198. Доказать, что наибольшие значения выражений $(\log_6 7)^{\sin x}$ и $(\log_7 6)^{\cos x}$ равны.

199. Доказать, что

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}>2.$$

200. Доказать, что если $x^2=y^2+z^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, то

$$x^\alpha>y^\alpha+z^\alpha \quad \text{при} \quad \alpha>2,$$
$$x^\alpha<y^\alpha+z^\alpha \quad \text{при} \quad \alpha<2.$$

201. Доказать, что при n натуральном, большем двух, имеет место неравенство

$$1<\sqrt[n]{n}<\frac{2}{\sqrt{n}}+1.$$

202. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2},$$

где n — натуральное число, отличное от единицы.

203. Доказать, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

204. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}}<1,$$

где n — натуральное.

205. Доказать, что сумма наибольшего и наименьшего членов пропорции

$$a:b=c:d,$$

члены которой положительны и не равны между собой, больше суммы двух остальных (*задача Евклида*).

206. Доказать, что при любом значении a имеет место неравенство

$$a^8+a^2+1>a^5+a.$$

207. Доказать, что при натуральном $n\geqslant 2$ и $|x|<1$ имеет место неравенство

$$(1+x)^n+(1-x)^n<2^n.$$

208. Доказать, что при $p>n$ и $a>b>0$ имеет место неравенство

$$\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}>\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}.$$

209. Доказать, что $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}\leqslant 5$, если $x+y+z=1$ и каждое из чисел x, y, z не меньше $-\frac{1}{4}$.

210. Доказать, что если четыре положительных числа x, y, z и t связаны условиями $xy=zt$ и $x-y>z-t>0$, то

$$(x-y)^2(z+t)>(z-t)^2(x+y).$$

211. Доказать неравенство

$$x^2+xy+my^2-m\geqslant 0,$$

где x — целое число, y — целое число, отличное от нуля, а m — целое положительное число.

212. Доказать, что если $a\neq b$ и $\alpha>0$, то выражение $\frac{a+\alpha b}{1+\alpha}$ заключено между a и b.

213. Доказать неравенство

$$ab+1<a+b,$$

где $a>1$, $b<1$.

214. Доказать, что если a и b одного знака, то имеет место неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2.$$

215. Доказать неравенство

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

216. Найти наименьшее значение функции $y = x + \frac{1}{x-2}$, если $x > 2$.

217. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{(4+x)(1+x)}{x}, \quad \text{если} \quad x > 0.$$

218. Доказать неравенство

$$y = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2.$$

219. Доказать, что имеет место неравенство

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

220. Доказать, что

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 10,$$

если $abcd = 1$ и $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

221. Доказать, что произведение двух положительных сомножителей, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение при равенстве сомножителей.

222. Доказать, что если $mx + ny = 2c$, где m, n, c — постоянные положительные числа, $x > 0$, $y > 0$, то произведение xy принимает наибольшее значение при $mx = ny = c$.

223. Доказать, что сумма двух положительных слагаемых x и y, произведение которых постоянно и равно c^2, имеет наименьшее значение при равенстве слагаемых, т. е. при $x = y = c$.

224. Доказать, что сумма двух положительных слагаемых mx и ny, где m и n — постоянные положительные числа, принимает наименьшее значение при $mx = ny$, если произведение xy постоянно.

225. Доказать, что произведение нескольких положительных переменных сомножителей, сумма которых постоянна, принимает наибольшее значение при равенстве сомножителей.

226. Доказать, что если сумма нескольких положительных переменных $x, y, \ldots, z$ постоянна и равна a, то

произведение $x^p \cdot y^q \ldots z^r$, где $p, q, \ldots, r$ — данные положительные рациональные числа, имеет наибольшее значение, когда переменные пропорциональны своим показателям, т. е. когда $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \ldots = \frac{z}{r}$.

227. Доказать, что среднее геометрическое двух положительных чисел не более их среднего арифметического.

228. Доказать, что среднее геометрическое четырех положительных чисел не более их среднего арифметического.

229. Доказать, что среднее геометрическое трех положительных чисел не более их среднего арифметического.

230. Доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не более их среднего арифметического *(неравенство Коши)*.

231. Доказать, что сумма m положительных переменных, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение при равенстве переменных.

232. Найти наибольшее значение функции $y = 3x^2 - 2x^3$, если $0 \leqslant x \leqslant \frac{6}{2}$.

233. Найти наибольшее значение функции $y = 4x^3 - x^4$, если $0 \leqslant x \leqslant 4$.

234. Найти наименьшее значение $z = x + y$, если x и y положительны и $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, где a — постоянная величина.

235. Найти наименьшее значение $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, если x и y положительны и $x + y = 2a$, где a — постоянная величина.

236. Найти наибольшее значение функции

$$y = x(40 - x)(25 - x),$$

где $0 \leqslant x \leqslant 25$.

237. Доказать, что $\frac{a + bx^4}{x^2} \geqslant 2\sqrt{ab}$, если $a > 0$ и $b > 0$.

238. Доказать, что

$$\frac{\log_a m + \log_a n}{2} \leqslant \log_a \frac{m+n}{2},$$

если $a > 1$, $m > 0$, $n > 0$.

239. Доказать неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n,$$

если $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

240. Доказать, что если α и β удовлетворяют уравнению $ax+by=c$ с положительными коэффициентами, то $\alpha\beta \leqslant \frac{c^2}{4ab}$.

241. Доказать, что имеет место неравенство

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc,$$

если $a+b+c=1$, $a>0$, $b>0$ и $c>0$.

242. Доказать неравенство

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \leqslant \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n),$$

где $a_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

243. Доказать, что $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 64ab(a+b)^2$, если $a>0$ и $b>0$.

244. Доказать, что если $a+b=1$, $a>0$ и $b>0$, то

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

245. Доказать, что если $a>0$, $b>0$ и $c>0$, то имеет место неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3.$$

246. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$.

247. Доказать неравенство

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a),$$

где a, b и c положительны.

248. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2},$$

где числа $a+b$, $b+c$ и $c+a$ положительны.

249. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant \frac{9}{2}.$$

250. Найти наименьшее значение

$$M=x^2+y^2+z^2,$$

если $x+y+z=3a$, где a — постоянная величина.

251. Доказать, что

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

при любом натуральном n.

252. Доказать, что для любых положительных чисел a и b имеет место неравенство

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}.$$

253. Доказать, что если $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, то

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

254. Доказать, что $(2n)! < [n(n+1)]^n$, если $n > 1$.

255. Доказать неравенство

$$(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m) : (a_1^{n-m} + a_2^{n-m} + \ldots + a_n^{n-m}) \geqslant$$

$$\geqslant n^2 \cdot a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

где a_1, a_2, ..., a_n — положительные числа, а m — любое вещественное число.

256. Доказать неравенство

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda \text{ } \textit{(неравенство Якова Бернулли)},$$

где $\lambda > 0$, n — натуральное, большее единицы ($n > 1$).

257. Доказать неравенство

$$\sqrt[n]{\alpha} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n},$$

где $\alpha > 1$, n — натуральное число, большее единицы.

258. У торговца заведомо неверные весы. Первому покупателю он отпускает один килограмм товара с одной чашки весов. Второму покупателю он отвешивает один килограмм того же товара на другой чашке, думая, что он при этом компенсирует неточность отвешивания. Спрашивается, выгадал торговец или остался в убытке?

259. Доказать, что имеет место неравенство

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2{,}75$$

при любом натуральном n.

260. Решить неравенство

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 > 0.$$

261. Решить неравенство

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1{,}001>0.$$

262. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}>1.$$

263. Решить неравенство

$$4^x-2\cdot 5^{2x}<10^x.$$

264. Решить неравенство

$$\log_a x+\log_a(x+1)<\log_a(2x+6) \quad (a>1).$$

265. Решить неравенство

$$x^{\log_a x+1}>a^2x \quad (a>1).$$

266. При каких вещественных x и α имеет место неравенство

$$\log_2 x+\log_x 2+2\cos\alpha\leqslant 0?$$

267. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_3 x>1.$$

268. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x+2\lg x-6}{\lg x}<1.$$

269. Решить неравенство

$$\arcsin\lg_{10} x>0.$$

270. Найти все значения a, при которых смешанная система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x\leqslant 1, \\ x-y+a=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

271. При каких значениях a система неравенств

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

удовлетворяется при всех значениях x?

Глава V

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

272. Пешеход шел вдоль трамвайной линии; через каждые 4 минуты он встречал вагон трамвая, а через каждые 12 минут его обгонял вагон трамвая. (Пешеход и трамвай двигались равномерно.) Через сколько минут следуют друг за другом вагоны трамвая?

273. Переход из порта A в порт B длится ровно 12 суток. Каждый полдень из A в B и из B в A отходит по пароходу. Сколько пароходов встретит в открытом море каждый из этих пароходов?

274. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

275. Автомобиль прошел расстояние от A до B со скоростью $v_1 = 40$ *км/час* и обратно со скоростью $v_2 = 30$ *км/час*. Какова средняя скорость рейса?

276. Для испытания мотоциклов разных систем два мотоциклиста выехали одновременно из A в B и из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в p *км* от B, второй раз в q *км* от A через t часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклов.

277. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 минут. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, они встречались бы через каждые 8 *мин*. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 *м*, то через 24 *сек* оно будет 26 *м*. Сколько метров в минуту проходит каждое тело и какова длина окружности, если известно, что в течение упомянутых 24 *сек* тела не встретились?

278. По окружности в противоположных направлениях движутся два тела: первое равномерно с линейной скоростью v, а второе равноускоренно с линейным ускорением a.

В начальный момент времени оба тела находились в одной точке A и скорость второго была равна нулю.

Через какое время произойдет первая встреча этих тел, если вторая встреча будет снова в точке A?

279. Расстояние между городами равно S *км*. Из этих городов выезжают одновременно навстречу друг другу два автомобиля и через t часов встречаются. Какова скорость каждого автомобиля, если первый из них проезжает p *км* на q часов дольше, чем другой?

280. Из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист проехал S *км*, из A в B выехал мотоциклист, который пришел в B на t часов раньше велосипедиста. Каково расстояние между A и B, если скорость велосипедиста v *км/час*, а скорость мотоциклиста $4v$ *км/час*?

281. На участке реки от A до B течение так слабо, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение уже достаточно сильное. Лодка покрывает расстояние вниз по течению от A до C за 6 часов, а от C до A вверх по течению за 7 часов. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 часа. Сколько времени в этом случае понадобилось бы на то, чтобы подняться вверх от C до A?

282. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из B в A выехал велосипедист. Когда расстояние между велосипедистом и пешеходом сократилось в четыре раза, из A в B выехал автомобиль, догнавший пешехода в момент его встречи с велосипедистом. Продолжая движение, автомобиль прибыл в B тогда, когда велосипедист доехал до A. Во сколько раз скорость велосипедиста превосходит скорость пешехода?

283. Морская экспедиция плыла на двух пароходах. Первый пароход вышел на сутки раньше второго, но пришел в порт назначения на сутки позже, так как вторую половину пути он шел медленнее, чем первую, на 10 *км* в *час*. Второй пароход шел все время с той же скоростью, с которой первый шел первую половину пути. Сколько суток шел второй пароход вперед, если известно, что, увеличив скорость на 10 *км* в *час*, он смог бы весь обратный путь проделать за 6 суток?

284. Колонна войск протяжением d *км* движется по шоссе маршем со скоростью v *км/час*. Конный вестовой выезжает из конца колонны в ее начало, передает приказание

и тотчас же отправляется обратно. На проезд туда и обратно вестовой тратит $\frac{t}{60}$ часа. Определить скорость вестового, если она была на всем пути одинакова. (Скорость колонны во время движения вестового постоянна.)

285. Пассажир, опоздавший на t часов на свой поезд, решил сначала догнать его на такси, однако через некоторое время пересел на автобус, заплатив за билет A рублей, и прибыл на одну из станций одновременно с поездом. Между тем он обнаружил, что если бы продолжал ехать на такси, то догнал бы поезд на τ часов раньше, истратив при этом на B рублей меньше. Какова скорость поезда, если скорость такси v_1, автобуса v_2, а стоимость проезда на такси равна a рублей за 1 *км*?

286. Два туриста одновременно отправляются из пункта A в пункт B. Один турист пошел пешком, а другой выехал на двухместном мотоцикле с водителем. Проехав часть пути, второй пошел дальше пешком, а водитель возвратился назад, взял первого туриста и прибыл в B одновременно со вторым. Найти время, затраченное туристами на передвижение из A в B, и расстояние, которое каждый из туристов прошел пешком, если известно, что расстояние между A и B равно S *км*, скорости туристов при движении пешком v_1 *км/час*, а скорость мотоцикла v_2 *км/час*.

287. Два пешехода вышли одновременно из пункта A в пункт B. Оба пешехода движутся равномерно. Когда каждый из них достигает пункта B, он поворачивает обратно. Первый пешеход, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии d *км* от B; затем, прийдя в A и снова повернув к B, он встречает второго пешехода, пройдя к тому времени n-ю часть расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

288. Мотоциклист отправился из A в B. Одновременно с ним выехал из B в A велосипедист. Их встреча произошла через n часов. Определить, за сколько часов каждый из них проезжает путь AB, если, продолжая движение после встречи, мотоциклист прибывает в B на t часов раньше, чем велосипедист в A.

289. Вестовому надо было проехать 20 *км*, причем первую половину пути он должен двигаться на 1 *км* в час быстрее, чем вторую половину. В каких пределах должна быть заключена его меньшая скорость, чтобы на весь путь он затратил от четырех до пяти часов?

290. Средний годовой процент прироста продукции из года в год остается постоянным. Если бы годовой процент прироста продукции увеличился на $p^0/_0$, то через 8 лет количество продукции было бы в два раза больше, чем при старых условиях прироста. Определить годовой процент прироста продукции.

291. Мастер дает сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В конце первых двух часов он закончил $p^0/_0$ партий выигрышем, а l партий проиграл. За следующие два часа он выиграл у $q^0/_0$ оставшихся противников, m партий проиграл и остальные n партий закончил вничью. На скольких досках шла игра?

292. В сосуд, содержащий A литров воды, сначала через одну трубу вливают a литров, содержащих $p^0/_0$ (по объему) спирта, а затем, после перемешивания, через другую трубу выливают a литров образующейся смеси. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы в сосуде получился раствор спирта, крепостью не менее $q^0/_0$ (по объему)?

293. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 *л* чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй раз, если вместимость бака 64 *л*?

294. Первый из n одинаковых цилиндрических сосудов налит доверху спиртом, а остальные — до половины смесью спирта с водой, причем концентрация спирта в каждом сосуде в k раз меньше, чем в предыдущем. Содержимым первого сосуда долили доверху второй, затем содержимым второго — третий и т. д. до последнего. Найти полученную концентрацию спирта в последнем сосуде.

295. Имеются два чана, расположенных один над другим. В первый чан, расположенный выше, поступает вода через трубу A; из первого во второй вода может переливаться по трубе B; из второго чана вода выливается через трубу C. Известно, что через A (при закрытой трубе B) первый чан наполняется за 3 часа, а через трубу B (при закрытой трубе A) он опорожняется за 5 часов. Если при пустых обоих чанах открыть все 3 трубы, то за 7 часов наполнится один из чанов. Если наполнить первый чан, а второй оставить пустым и после этого открыть трубы B и C (при закрытой трубе A), то через 6 часов оба чана опорожняются полностью. Какой из чанов больше и во сколько раз?

296. При перемножении чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков в произведении. При делении (для проверки ответа) полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

297. Часы показывают в некоторый момент на m минут меньше, чем следует, хотя и спешат. Если бы они показывали на n минут меньше, чем следует, но уходили бы в сутки на t минут больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем показывают. На сколько минут в сутки эти часы спешат?

298. Найти четырехзначное число, у которого цифра тысяч равна цифре десятков, а цифра сотен на единицу больше цифры единиц, если известно, что искомое число представляет собой точный квадрат.

299. Два слитка весят вместе m *г*. В первом слитке содержится чистого золота $p\%$, во втором — $q\%$. Известно, что в первом слитке содержится чистого золота на n *г* больше, чем во втором. Сколько весит каждый из слитков?

300. Первый кран наполнял чан в течение t дней и за это время наполнил $\frac{m}{n}$ чана, остальную часть наполнил второй кран.

Если бы оба крана действовали одновременно, то чан наполнился бы за число дней, равное среднему арифметическому между числом дней, в течение которых действовал первый кран, и числом дней, в течение которых действовал второй. Сколько дней действовал второй кран?

301. Имеющиеся в совхозе комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. По плану же работы в первый час работал лишь один комбайн, во второй — два, в третий — три и т. д. (до тех пор, пока не начали работать все комбайны), а затем в течение нескольких часов перед завершением уборки урожая действовали все комбайны. Время работы по плану было бы сокращено на шесть часов, если бы с самого начала уборки постоянно работали все комбайны, за исключением пяти. Сколько было комбайнов в совхозе?

302. Определить, за сколько дней может выполнить каждый из трех рабочих некоторую работу, если производительность третьего рабочего равна полусумме производительностей первого и второго. Известно, что если бы

третий рабочий проработал a дней, то для окончания остальной работы первому потребовалось бы b дней, а второму — c дней.

303. Пятизначное число начинается слева цифрой 3. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных четырех цифр, то вновь полученное число будет на 29 997 больше первоначального. Найти первоначальное число.

304. Найти целые положительные числа, разность квадратов которых равна 455.

305. Для нумерации страниц книги потребовалось 6857 цифр. Сколько страниц в книге?

306. Дети делят орехи. Первый взял a орехов и n-ю часть остатка; второй — $2a$ орехов и n-ю часть нового остатка; третий — $3a$ орехов и n-ю часть нового остатка и т. д. Оказалось, что таким способом разделены все орехи поровну.

Сколько было детей?

Глава VI

ПРОГРЕССИИ И СУММЫ

307. Из натуральных чисел составлены группы

$$(1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9),\ \ldots,$$

так что каждая оканчивается квадратом номера группы. Найти сумму членов k-й группы.

308. Из нечетных чисел составлены группы

$$(1),\ (3,\ 5),\ (7,\ 9,\ 11),\ \ldots,$$

так что n-я группа содержит n членов. Найти сумму чисел n-й группы.

309. Некоторые члены арифметических прогрессий

$$17,\ 21,\ 25,\ 29,\ \ldots \text{ и } 16,\ 21,\ 26,\ 31,\ \ldots$$

одинаковы. Найти сумму первых ста одинаковых членов.

310. В арифметической прогрессии, состоящей из четырех целых чисел, наибольший член равен сумме квадратов остальных трех членов. Найти члены этой арифметической прогрессии.

311. Доказать, что если синусы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию, то котангенсы половин его углов образуют тоже арифметическую прогрессию.

312. Доказать, что если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию, то имеет место равенство

$$S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d},$$

где d — разность прогрессии.

313. Пусть S_1, S_2 и S_3 — соответственно суммы n_1 первых членов, n_2 первых членов и n_3 первых членов некоторой арифметической прогрессии. Показать, что

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0.$$

314. Составим таблицу

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
. . . . . .

Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки равна квадрату нечетного числа.

315. Найти такую арифметическую прогрессию, у которой отношение суммы первых n членов к сумме kn последующих не зависит от n.

316. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

317. Доказать, что всякая последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих при любом $n\geqslant 3$ условию

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

есть арифметическая прогрессия.

318. Доказать, что во всякой конечной арифметической прогрессии, разность которой отличается от нуля, произ-

ведение двух членов, равноотстоящих от крайних членов, возрастает по мере удаления от концов ее к середине.

319. Доказать, что во всякой конечной геометрической прогрессии, абсолютные величины членов которой различны, сумма абсолютных величин двух членов, равноотстоящих от концов прогрессии, убывает по мере удаления от концов прогрессии к ее середине.

320. Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ обладает тем свойством, что разность $x_{n+1} - x_n$ есть $(n+1)$-й член геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q.

Выразить $x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ через x_1, a, q и n.

321. Сумма любых пяти последовательных членов возрастающей геометрической прогрессии в 19 раз больше третьего из них. Найти эту прогрессию, если известно, что один из ее членов (m-й) равен единице.

322. Каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии отличается постоянным множителем k от суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, начинающейся со следующего члена. Какие значения может принимать k?

323. Найти произведение P первых n членов геометрической прогрессии, если известно, что их сумма равна S_1, а сумма чисел, обратных первым n членам прогрессии, равна S_2.

324. Найти предел суммы

$$S_n = \frac{a \pm a_1}{aa_1} + \frac{aq \pm a_1q_1}{aqa_1q_1} + \frac{aq^2 \pm a_1q_1^2}{aq^2a_1q_1^2} + \ldots + \frac{aq^n \pm a_1q_1^n}{aq^na_1q_1^n},$$

если $q > 1$, $q_1 > 1$ и $n \to \infty$ $(a \neq 0;\ a_1 \neq 0)$.

325. Даны числа a, b, c, d, e такие, что a, b, c — три последовательных члена арифметической прогрессии; b, c, d — последовательные члены геометрической прогрессии и c, d, e составляют гармоническую прогрессию. Доказать, что a, c, e — три последовательных члена геометрической прогрессии.

326. Доказать, что если a, b, c одновременно являются 5-м, 17-м и 37-м членами как арифметической, так и геометрической прогрессий, то имеет место равенство

$$a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1.$$

327. Найти две прогрессии — арифметическую и геометрическую, если известно, что первые члены этих прогрессий

равны, сумма первых двух членов арифметической прогрессии больше суммы двух первых членов геометрической прогрессии на утроенный первый член, а суммы первых трех членов обеих прогрессий равны.

328. Даны арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_1\neq a_2$ и $a_n>0$ для всех натуральных чисел n. Доказать, что $a_n<b_n$ при $n>2$.

329. Доказать, что если для геометрической прогрессии

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

и арифметической прогрессии

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

выполняются неравенства

$$a_1>0,\quad \frac{a_2}{a_1}>0,\quad b_2-b_1>0,$$

то существует такое число α, что $\log_\alpha a_n-b_n$ не зависит от n.

330. Доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

при любом натуральном n.

331. Доказать равенство

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=C_{n+1}^2+2\left(C_n^2+C_{n-1}^2+\ldots+C_2^2\right).$$

332. Доказать, что

$$S_n=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

при любом натуральном n.

333. Найти сумму первых n членов ряда

$$n(n-1^2)+2n(3n-2^2)+3n(5n-3^2)+\ldots$$
$$\ldots+kn\left[(2k-1)n-k^2\right]+\ldots$$

334. Найти сумму

$$S_n=1\cdot3x+3\cdot5x^2+\ldots+(2n-1)(2n+1)x^n.$$

335. Найти сумму n первых членов ряда

$$1\cdot2+1\cdot3\cdot4+1\cdot3\cdot5\cdot6+1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot8+\ldots$$
$$\ldots+1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\ldots(2k-1)(2k)+\ldots$$

336. Найти сумму n первых членов ряда

$$1+2\cdot3+2\cdot4\cdot5+2\cdot4\cdot6\cdot7+\ldots$$
$$\ldots+2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots[2(k-1)](2k-1)+\ldots$$

337. Найти сумму всех парных произведений, которые можно составить из чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ (n-1),\ n.$$

338. Найти сумму

$$S_n=2\cdot1^2+3\cdot2^2+4\cdot3^2+\ldots+n(n-1)^2+(n+1)n^2.$$

339. Найти сумму

$$S=a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2,$$

где $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2n-1},\ a_{2n}$ — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью d.

340. Найти сумму первых n членов ряда

$$S=8+2\cdot89+3\cdot899+4\cdot89\,999+\ldots$$

341. Найти сумму

$$S_n=1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+\ldots+na^{n-1}.$$

342. Доказать, что имеет место равенство

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

при любом натуральном n.

343. Найти сумму

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}.$$

344. Найти сумму первых n членов ряда

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\ldots$$

345. Найти сумму первых n членов ряда

$$\frac{3}{(1\cdot2)^2}+\frac{5}{(2\cdot3)^2}+\frac{7}{(3\cdot4)^2}+\ldots+\frac{2k+1}{[k(k+1)]^2}+\ldots$$

346. Найти сумму первых n членов ряда

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{k}{1\cdot2\cdot3\ldots(k+1)}+\ldots$$

347. Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(3n-5)(3n-2)} + \\ + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

348. Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}}.$$

349. Доказать, что

$$1 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - 10^3 C_{2n}^3 + \ldots + 10^{2n-1} C_{2n}^1 + 10^{2n} = 81^n.$$

350. Вычислить суммы

$$A = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$$

и

$$B = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx.$$

351. Доказать тождество

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta) = \\ = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

352. Доказать тождество

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+3\beta) + \ldots, \\ \ldots + \cos(\alpha+n\beta) = \frac{\sin\frac{(n+1)\beta}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

353. Найти сумму

$$S = \frac{1}{\sin x\cdot\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2x\cdot\sin 3x} + \ldots + \frac{1}{\sin(n-1)x\cdot\sin nx}.$$

354. Определить сумму первых n членов ряда

$$\sin a_1\cdot\sin a_2 + \sin a_2\cdot\sin a_3 + \ldots + \sin a_k\cdot\sin a_{k+1} + \ldots$$

при условии, что a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1} образуют арифметическую прогрессию.

355. Найти сумму первых n членов ряда

$$\operatorname{tg} a_1 \cdot \operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} a_2 \cdot \operatorname{tg} a_3 + \ldots + \operatorname{tg} a_k \cdot \operatorname{tg} a_{k+1} + \ldots,$$

если a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$ a_n, a_{n+1} составляют арифметическую прогрессию.

356. Показать, что при любом натуральном n имеет место равенство

$$\frac{\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2^3} - 1\right) \ldots \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2^{2n-1}} - 1\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{2n}}}{\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2^2} - 1\right)\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2^4} - 1\right) \ldots \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2^{2n}} - 1\right)} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

357. Найти сумму

$$S_n = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

358. Упростить выражение

$$A = \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin (2n-1)\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos (2n-1)\alpha}.$$

359. Доказать, что

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \ldots \cos 2^k \alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1} \sin \alpha}.$$

360. Доказать, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha} + \ldots + \frac{\sin (2n-1)\alpha}{\sin \alpha} = \left(\frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}\right)^2.$$

361. Найти сумму

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha.$$

362. Найти сумму

$$S_n = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$$

363. Найти сумму

$$S_n = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha.$$

364. Найти сумму

$$S_n = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{6} + \arcsin \frac{\sqrt{15} - \sqrt{8}}{12} + \ldots$$
$$\ldots + \arcsin \frac{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}.$$

Глава VII

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

365. Доказать, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

366. Доказать, что

$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}} = \log_b a.$$

367. Доказать, что

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

если $a > 0$, $b > 0$, $N > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

368. Доказать, что

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b.$$

369. Доказать, что если

$$(ac)^{\log_a b} = c^2,$$

то числа $\log_a N$, $\log_b N$ и $\log_c N$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

370. Доказать, что

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n.$$

371. Доказать, что если

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

то

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

372. Доказать, что если

$$4a^2 + 9b^2 = 4ab, \quad a > 0,$$

то

$$\log \frac{2a+3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

373. Доказать, что если a, b и c — последовательные члены геометрической прогрессии, то

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} \quad (N \neq 1).$$

374. Чему равно выражение

$$\log_{a^k} a^l?$$

375. Доказать тождество

$$y = \log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

376. Доказать тождество

$$\log_{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

377. Доказать тождество

$$\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_b x - \log_a x}.$$

378. Известно, что $\log_a b = A$, $\log_q b = B$ и $n > 0$ целое. Вычислить $\log_c b$, где c равняется произведению n членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q.

379. Доказать тождество

$$n = -\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots \ldots \sqrt[3]{3}}}}_{n \text{ раз}}.$$

380. Решить уравнение

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

381. Решить уравнение

$$\log_2 (x+1)^2 + \log_2 (x+1) = 6.$$

382. Решить уравнение

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg \lg n - 1) \log_x 10.$$

Исследовать решение.

383. Решить уравнение

$$a^{b^x} = c,$$

где a, b, c — положительные числа, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

384. Решить уравнение

$$(1 + \log_c a) \log_a x \cdot \log_b c = \log_b x \cdot \log_c x \cdot \log_a c.$$

385. Найти все значения k, при которых уравнение

$$\frac{\lg (kx)}{\lg (x+1)} = 2$$

имеет только один корень.

386. Решить уравнение

$$\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3.$$

387. Решить уравнение

$$\sqrt[x]{4} + \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{9}.$$

388. Показать, что уравнение

$$2^{\arccos x} + \log_2 x = \sqrt{x-3}$$

не имеет решений.

389. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ yx^2 = 1. \end{cases}$$

390. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{12} x \left(\dfrac{1}{\log_x 2} + \log_2 y \right) = \log_2 x, \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x+y) = 3 \log_3 x. \end{cases}$$

391. Решить систему

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

392. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^p = y^q, \end{cases}$$

считая $x > 0$, $y > 0$ и $pq > 0$.

393. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = a^2 + a. \end{cases}$$

Исследовать решение.

394. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^x b^y = ab, \\ 2\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b. \end{cases}$$

Глава VIII

КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

395. Сколько нулей имеет на конце число 50!?

396. Доказать, что отношение

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_i!}$$

есть целое число, если $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_i \leqslant n$.

397. Сколько цифр имеет число

$$A = 1 + 10^4 + \frac{10^4 (10^4 - 1)}{1 \cdot 2} + \frac{10^4 (10^4 - 1)(10^4 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots ?$$

398. Найти сумму квадратов коэффициентов бинома Ньютона.

399. Доказать равенство

$$\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^m}{m+1} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

400. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы в каждом числе была одна единица?

401. Сколькими различными способами можно распределить 12 различных предметов между тремя лицами A, B и C так, чтобы каждый получил по 4 предмета?

402. Надо поместить в восьми клетках, стоящих на одной прямой, 4 гласные буквы и 4 согласные так, чтобы не оказались рядом 2 гласные или 2 согласные. Сколькими способами это можно сделать?

403. Сколькими способами можно разместить в ряд $p+q$ шаров, из которых p белых и q черных ($p>q$) при условии, что черные шары не лежат рядом.

404. Сколько можно составить трехзначных чисел из 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если в каждом числе каждая цифра может встречаться сколько угодно раз?

405. Найти, сколько делителей имеет число $288=2^5\cdot 3^2$, если в число делителей включаются единица и само число.

Обобщить задачу для числа

$$N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k},$$

где p_1, p_2, ..., p_k — различные простые числа.

406. В ящик вложили k ящиков. В каждый из этих k ящиков либо опять вложили k ящиков, либо не вложили ни одного и т. д. Найти число пустых ящиков, если наполненных оказалось m.

407. Сколько можно сделать из n элементов перестановок, в которых два элемента a и b не стоят рядом?

408. Из чисел 1, 2, 3, ..., 100 составлены всевозможные парные произведения. Сколько среди полученных чисел таких, которые кратны трем?

409. Сколькими способами можно составить разведывательную группу из трех офицеров и семи солдат, если всего 10 офицеров и 20 солдат?

410. Даны k заглавных букв, m гласных и n согласных (всего $k+m+n$ букв). Сколько различных слов можно составить из этих букв, если в каждом слове на первом месте должна стоять заглавная буква, среди же прочих букв должно быть μ различных гласных (из числа данных m) и ν различных согласных (из числа данных n)?

411. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по 2 туза?

412. Даны k концентрических окружностей. Из центра проведено l лучей ($k\leqslant l$). Сколькими способами можно выбрать s таких точек пересечения лучей с окружностями, чтобы никакие две из точек одного набора не лежали на одной окружности и никакие две не лежали на одном луче ($s\leqslant k$)?

413. На плоскости дано n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найти число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.

414. Доказать, что n прямых, расположенных в одной плоскости, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, рассекают плоскость на $1+\frac{n(n+1)}{2}$ частей.

415. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы ни одна из них не могла бить другую?

416. При каком значении k член T_{k+1} разложения по формуле бинома Ньютона

$$(1+\sqrt{3})^{100}$$

будет одновременно больше предыдущего и больше последующего членов этого разложения?

417. Сколько делителей имеет число

$$q=p_1p_2\ldots p_n,$$

считая 1 и q, если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа?

418. Найти все возможные пары целых положительных чисел, сумма которых равна $10^0/_0$ их произведения.

Глава IX

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

419. Доказать, что

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=4(a^2-b^2),$$

если $a+bi=\sqrt[3]{x+yi}$.

420. Где расположены точки на числовой плоскости, для которых

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1 \quad (z\text{ — комплексное число})?$$

421. Доказать тождество

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2),$$

где z_1 и z_2 — комплексные числа.

422. Показать, что корни уравнения x^n-1 могут быть записаны в виде

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1}.$$

423. Найти сумму p-х степеней корней уравнения x^n-1, где p — целое.

424. Вычислить выражение

$$z^{142}+\frac{1}{z^{142}},$$

если z есть корень уравнения $z+\frac{1}{z}=1$.

425. Найти все значения z, удовлетворяющие уравнению

$$z^2+|z|=0,$$

где z — комплексное число.

426. Доказать, что если комплексное число z удовлетворяет соотношению $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$, то наибольшее возможное значение его модуля равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Глава X

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

427. Определить вид треугольника, если между его элементами имеют место зависимости

$$(a^3+b^3-c^3):(a+b-c)=c^2 \text{ и } \sin A\sin B=\frac{3}{4}.$$

428. Три окружности O, O_1 и O_2 пересекаются в точке M и касаются одной прямой ABC соответственно в точках A, B и C. Найти зависимость между их радиусами R_1, R_2, R_3 и углами O_1MO_2, O_2MO, OMO_1.

429. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AOC и BOD образуют со сторонами восемь углов в круговой последовательности α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8. Найти

отношение произведения синусов углов с четными индексами к произведению синусов углов с нечетными индексами.

430. На перпендикуляре EK, проведенном к отрезку $AB=a$ через его середину K, взяты точки C, D, E, расстояния которых до прямой AB равны соответственно $0{,}5\,a$, a и $1{,}5\,a$. Найти сумму углов ACB, ADB и AEB.

431. По углам α и β, образованным продолжениями противоположных сторон вписанного в круг четырехугольника, определить углы этого четырехугольника.

432. Одной и той же прямой касаются две окружности, радиусы которых соответственно равны 3 *м* и 12 *м*, а расстояние между центрами которых равно 41 *м*. Эти окружности одновременно начинают катиться по общей касательной навстречу друг другу с одинаковой скоростью 1 *м* в минуту. Через сколько минут окружности прикоснутся друг к другу?

433. Меньшее основание трапеции $DC=b$, большее основание трапеции $AB=a$. На продолжении меньшего основания определить точку M такую, чтобы прямая AM разделила трапецию на две равновеликие части.

434. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна c, а острый угол 15°.

435. Выразить через стороны a, b, c треугольника ABC отрезки, соединяющие точки, в которых стороны треугольника касаются вписанной в него окружности.

436. Определить площадь треугольника ABC по данным углам A, B, C и медиане $AM=m$.

437. Сторонами треугольника являются корни уравнения $x^3-42x^2+587x-2730=0$. Не решая это уравнение, найти площадь треугольника.

438. Биссектриса внутреннего угла B треугольника ABC равна l, а биссектриса смежного с ним угла равна l_1. Найти площадь треугольника, если $AB:BC=k$.

439. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, O—точка пересечения диагоналей. Найти площадь трапеции, если площади треугольников AOD и BOC равны соответственно p^2 и q^2.

440. Дано, что медианы m_a и m_c треугольника ABC образуют со стороной AC углы, дающие в сумме 60°, и что произведение $m_a \cdot m_c=\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника ABC.

441. Дан ромб с углом в 30°, большая диагональ которого равна a. В этот ромб вписан прямоугольник так, что одна

из его диагоналей есть меньшая диагональ ромба. Определить площадь прямоугольника.

442. Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности относится к радиусу вписанной в него окружности, как 5:2. Найти острые углы треугольника.

443. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус вписанного круга равен r, а радиус вневписанного круга, касающегося гипотенузы, равен R.

444. Дан квадрат со стороной, равной a; если на двух противоположных сторонах этого квадрата построить внутри него два правильных треугольника, то боковые стороны треугольников пересекутся и образуют четырехугольник. Определить площадь этого четырехугольника.

445. К двум касающимся извне в точке A окружностям, радиусы которых 3 и 1, проведена общая внешняя касательная BC. Найти площадь фигуры ABC, ограниченной окружностями и касательной.

446. Через точку R, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные соответственно сторонам треугольника; площади получившихся трех треугольников равны a^2, b^2, c^2. Найти площадь основного треугольника.

447. Найти площадь параллелограмма по диагоналям p и q $(p > q)$ и острому углу α.

448. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Найти отношение катетов прямоугольного треугольника.

449. Около треугольника ABC описана окружность и к ней в точке A проведена касательная, пересекающаяся с продолжением BC в точке T. Выразить AT и BT через стороны a, b и c треугольника.

450. В треугольнике найти отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов его сторон.

451. Найти третью сторону треугольника, если даны две стороны его a и b и известно, что медианы, проведенные к этим сторонам, пересекаются под прямым углом. При каких условиях такой треугольник существует?

452. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

453. В равносторонний треугольник, сторона которого равна 3, вписан другой равносторонний треугольник, втрое меньший первого по площади. Найти расстояние между двумя смежными вершинами этих треугольников.

Глава XI

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

454. Доказать, что биссектриса угла A треугольника ABC делит противолежащую сторону a на отрезки m и n такие, что

$$m=\frac{ac}{b+c} \quad \text{и} \quad n=\frac{ab}{b+c}.$$

455. Доказать, что квадрат биссектрисы угла треугольника равен разности между произведением прилежащих сторон и произведением отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону.

456. Доказать, что биссектриса угла треугольника

$$l_A=\frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}.$$

457. Доказать, что квадрат биссектрисы l_A угла A треугольника можно определить по формуле

$$l_A^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

где a, b, c — стороны треугольника.

458. Доказать, что биссектриса l_A угла A треугольника ABC равна

$$\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

где b и c — стороны треугольника, заключающие угол A.

459. Доказать, что если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AC и A_1C_1, углы B и B_1 и биссектрисы BP и B_1P_1 этих углов, то треугольники равны.

460. Доказать, что если две биссектрисы треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

461. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

462. Если биссектрисы двух прилежащих углов ABC и CBD взаимно перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой. Доказать.

463. Одна из диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, является диаметром окружности. Доказать, что проекции противоположных сторон четырехугольника на вторую диагональ равны между собой.

464. Перпендикуляры AD и CD, проведенные к сторонам AB и BC треугольника ABC, пересекаются в точке D. Доказать, что расстояния от точек B и D до перпендикуляра, проведенного к стороне AC через ее середину, равны.

465. Доказать, что окружности, проходящие соответственно через каждые две вершины треугольника и его ортоцентр, равны окружности, описанной около данного треугольника.

466. Доказать, что любая секущая, проведенная через центр вписанного в треугольник круга, делит площадь и периметр треугольника в равных отношениях.

467. Даны угол и его биссектриса. Произвольная окружность, проходящая через вершину угла, отсекает на сторонах угла и его биссектрисе соответственно отрезки a, b, c. Доказать, что отношение $\frac{a+b}{c}$ не зависит от положения окружности.

468. Доказать, что для всякой хорды AB данной окружности отношение $AB^2 : AD$, где AD — расстояние точки A до касательной к окружности в точке B, есть величина постоянная.

469. Даны окружность O и две точки A и B. Доказать, что продолжение общей хорды окружности O и любой другой окружности, проходящей через точки A и B (и пересекающей окружность O), пересекается с прямой AB в определенной точке, лежащей на продолжении хорды AB.

470. Доказать, что отрезки, соединяющие соответственно середины противоположных сторон и середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

471. Доказать, что прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника, проходит через середину

отрезка, соединяющего середины противоположных сторон этого четырехугольника.

472. Доказать, что если в шестиугольнике две пары противоположных сторон равны и параллельны, то три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

473. В треугольнике ABC взяты произвольно точки A_1 на BC, B_1 на CA, C_1 на AB. Доказать, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 пересекаются в одной точке.

474. Через вершины A и B, B и C, C и A треугольника ABC проведены соответственно три окружности так, что их дуги, лежащие вне треугольника, вмещают углы, сумма которых равна 180°. Доказать, что эти окружности проходят через одну точку.

475. Доказать, что две касательные к окружности и хорда, соединяющая точки их касания, отсекают равные отрезки на перпендикуляре, проведенном через произвольную точку этой хорды, к прямой, соединяющей эту точку с центром.

476. Пусть O—центр круга, вписанного в треугольник ABC. Доказать, что имеет место равенство

$$AO^2 \cdot BC + BO^2 \cdot AC + CO^2 \cdot AB = abc,$$

где a, b, c—стороны, противолежащие соответственно углам A, B, C.

477. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A + \angle A_1 = 180°$ и $\angle B = \angle B_1$. Доказать, что между сторонами треугольников существует зависимость

$$aa_1 = bb_1 + cc_1.$$

478. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что площадь всего треугольника вдвое больше площади треугольника ADE. Доказать, что DE и медиана CM пересекаются в такой точке K, что имеет место равенство

$$KM \cdot KD = KE \cdot KC.$$

479. Доказать, что если из точки M, взятой внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры l_a, l_b, l_c соответственно на стороны a, b, c, то имеет место равенство

$$\frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} = 1,$$

где h_a, h_b, h_c—высоты треугольника.

480. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущен на гипотенузу c перпендикуляр $CD=p$, а из полученной точки D опущены перпендикуляры DE и DF на катеты AC и BC. Обозначим отрезки AE через m, а BF через n. Доказать, что имеют место следующие зависимости

1) $p^3=cmn$,

2) $m^2+n^2+3p^2=c^2$,

3) $\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}=\sqrt[3]{c^2}$.

481. Доказать, что произведение квадратов диагоналей параллелограмма, угол которого равен 45°, равно сумме четвертых степеней прилежащих двух его сторон.

482. Доказать, что если четырехугольник вписанный, то сумма произведений противолежащих сторон его равна произведению его диагоналей. *(Теорема Птолемея.)*

483. Доказать, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна сумме радиусов описанного и вписанного кругов.

484. На дуге окружности, описанной около треугольника ABC, взята точка M так, что прямая MA пересекает сторону BC в точке D. Доказать, что

$$a\cdot AM\cdot AD=b^2\cdot BD+c^2\cdot CD,$$

где a, b, c — стороны BC, CA, AB треугольника.

485. Доказать, что в правильном семиугольнике $ABCDEFP$ имеет место зависимость

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

486. Доказать, что в любом треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанного круга лежат на одной прямой *(прямая Эйлера)*.

487. Доказать, что в любом треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от ортоцентра до вершины, лежат на одной окружности *(окружность девяти точек* или *окружность Эйлера)*. Доказать, что центр этой окружности есть середина отрезка, соединяющего центр описанного круга с ортоцентром треугольника.

488. Две окружности пересекаются в точках A и B; CAD — секущая (C и D лежат на окружностях). Через точки D

и C проведены касательные до пересечения в точке E. Доказать, что около четырехугольника $BCED$ можно описать окружность.

489. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает в точке D перпендикуляр, проведенный к стороне AB через ее середину. Доказать, что около четырехугольника $ADBC$ можно описать окружность.

490. К двум внешне касающимся окружностям проведены общие внешние касательные AB и CD. Доказать, что около четырехугольника $ABDC$ можно описать окружность.

491. Дано, что прямая, проведенная через вершину B треугольника ABC и середину M противоположной стороны, проходит через центр O окружности, описанной около этого треугольника. Доказать, что если треугольник разносторонний, то он прямоугольный.

492. Круг, вписанный в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D, причем $AC \cdot CB = 2AD \cdot DB$. Доказать, что треугольник прямоугольный.

493. Доказать, что если высоты h_a, h_b, h_c и радиус r вписанной в треугольник окружности удовлетворяют равенству $h_a + h_b + h_c = 9r$, то треугольник равносторонний.

494. Доказать, что если ортоцентр треугольника лежит на окружности, проходящей через середины его сторон, то треугольник прямоугольный.

495. Доказать, что пятиугольник правильный, если все его стороны равны и равны три последовательных угла.

496. В остроугольном треугольнике AFE высоты ED и FB пересекаются в точке C. Точки M, N, P и Q являются соответственно серединами отрезков FC, EC, AE и AF. Доказать, что четырехугольник $MQPN$ — прямоугольник.

497. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют также квадрат.

498. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

499. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площадь треугольника BKC (K — точка пересечения его диагоналей) есть средняя пропорциональная между площадями треугольников AKB и CKD. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

500. Доказать, что расстояние точки окружности от хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями концов хорды от касательной к кругу в этой точке.

501. Доказать, что для того, чтобы один из углов треугольника был равен 60° или 120°, необходимо и достаточно, чтобы расстояние от вершины этого угла до ортоцентра было равно радиусу R описанной окружности.

502. Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка P так, что $CP^2 = AP^2 + BP^2$. Доказать, что угол APB равен 150°.

503. Пусть PQ—общая секущая двух внутренне касающихся окружностей O и O'. Точки P и Q лежат на большей окружности O'. M и N—точки пересечения PQ с меньшей окружностью O. Доказать, что $\angle PAM = \angle NAQ$ и $\angle PAN = \angle QAM$. Как изменится эта теорема, когда секущая обратится в хорду наружного круга, касательную к внутреннему?

504. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC, равное радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (точка D лежит дальше от C, чем точка O). Доказать, что угол AOD равен утроенному углу ACD.

505. Доказать, что если в четырехугольнике суммы квадратов противоположных сторон равны, то диагонали его взаимно перпендикулярны.

506. Доказать, что прямые, соединяющие середины дуг, стягиваемых противоположными сторонами вписанного в окружность четырехугольника, взаимно перпендикулярны.

507. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) на продолжении стороны AB отложен отрезок BD, а на стороне AC—отрезок CE, равный BD. Доказать, что если на отрезках BD и DE построить параллелограмм $DBFE$, то FC перпендикулярен BC.

508. Доказать, что биссектрисы углов, образованных продолжениями противоположных сторон вписанного четырехугольника, взаимно перпендикулярны.

509. Прямоугольный треугольник делится высотой, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, на два треугольника, в которые вписаны окружности. Доказать, что линия центров этих окружностей перпендикулярна к биссектрисе прямого угла данного треугольника.

510. Доказать, что во всяком треугольнике три точки, симметричные с точкой пересечения высот отно-

сительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности.

511. Около треугольника ABC описана окружность. Доказать, что точка D, диаметрально противоположная точке C, симметрична ортоцентру треугольника относительно середины стороны AB.

512. Доказать, что точка, симметричная центру окружности относительно середины средней линии треугольника, вписанного в эту окружность, лежит на высоте, перпендикулярной к этой средней линии.

513. Правильный треугольник ABC вписан в круг и через середины двух дуг AB и BC проведена хорда. Доказать, что стороны треугольника делят хорду на три равные части.

514. Доказать, что если из точки P, взятой вне круга O, проведены к нему касательные PA и PB и перпендикуляр AC к диаметру BD, то прямая PD делит AC пополам.

515. В треугольнике ABC углы B и C равны соответственно 15° и 30°. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная к AB до пересечения с BC в точке D. Доказать, что отрезок BD в два раза больше стороны AC.

516. Доказать, что площадь S треугольника равна

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{abc\,h_a h_b h_c},$$

где a, b, c—его стороны, а h_a, h_b, h_c—его высоты.

517. Доказать, что если угол, прилежащая сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны таким же элементам другого, то такие треугольники равны.

518. Доказать, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от этого треугольника подобный ему треугольник.

519. Доказать, что площадь остроугольного треугольника равна произведению периметра треугольника, вершины которого—основания высот данного треугольника, на радиус окружности девяти точек.

520. Из произвольной точки P биссектрисы AD треугольника ABC опущены перпендикуляры PC_1, PA_1 и PB_1 соответственно на стороны AB, BC и CA. Доказать, что точка K пересечения прямых B_1C_1 и PA_1 лежит на медиане AM.

521. В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании AD равна 90°. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

Глава XII

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА НАХОЖДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

522.*) Доказать, что существуют только две точки, которые делят данный направленный отрезок в данном отношении: одна — внутренним образом, а другая — внешним.

523. Доказать, что геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся между собой в данном отношении k, отличном от единицы, есть окружность.

524. Пусть A и A_1 — точки касания общей касательной к двум окружностям; M и M_1 — две точки пересечения этих окружностей соответственно с некоторой прямой, параллельной AA_1. Найти геометрическое место точек N пересечения прямых AM и A_1M_1.

525. Даны фиксированная хорда AB и подвижная хорда CD постоянной длины той же окружности. Найти геометрическое место точек M пересечения прямых AD и BC. На меньшей дуге точки расположены в порядке A, C, D, B, а на большей дуге — в порядке B, C, D, A.

526. Даны фиксированная хорда AB и подвижная хорда CD постоянной длины той же окружности. Найти геометрическое место точек K пересечения прямых AC и BD. На меньшей дуге точки расположены в порядке A, C, D, B, а на большей дуге — в порядке B, C, D, A.

527. Найти геометрическое место точек концов отрезков, проведенных из точек окружности в одном направлении, если они равны и параллельны данному отрезку.

528. Даны фиксированная хорда AB и подвижная хорда CD постоянной длины той же окружности. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников MCD и KCD, где K — точка пересечения AC и BD, а M — точка пересечения AD и BC.

529. Из фиксированной точки вне окружности проведена секущая и в точках пересечения ее с окружностью —

---

*) Эта задача является вспомогательной для решения других задач.

касательные. Найти геометрическое место пересечения этих касательных.

530. Из точки D, взятой на стороне BC треугольника ABC, проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны AC и AB (или их продолжения) соответственно в точках E и F. Найти геометрическое место точек пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников CDE и BDF.

531. На сторонах угла M взяты равные отрезки AB и CD (A между M и B, C между M и D). Доказать, что геометрическое место точек пересечения окружностей MCB и MAD—биссектриса угла M.

532. Доказать, что геометрическим местом центров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники, гипотенузой которых служит фиксированный отрезок длиной $2k$, являются две дуги окружностей с радиусами $k\sqrt{2}$.

533. Найти геометрическое место середин гипотенуз прямоугольного треугольника, у которого вершина прямого угла фиксирована, а остальные две вершины B и C скользят по заданной окружности O.

534. Найти геометрическое место точек M внутри треугольников ABC, для которых площадь треугольника MAB равна сумме площадей треугольников MBC и MAC.

535. Найти геометрическое место точек середин отрезков, соединяющих данную точку с точками данной окружности.

536. Найти геометрическое место середин хорд окружности, которые проходят через заданную точку.

537. На каждом из радиусов окружности откладывают от центра отрезок, равный расстоянию конца этого радиуса до одного фиксированного диаметра. Найти геометрическое место концов построенных таким образом отрезков.

538. Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M, удовлетворяющих условию

$$AM = BM + MC.$$

539. Одна окружность касается прямой в точке A. Другая касается той же прямой в точке B и первой окружности в точке M. Найти геометрическое место точек M.

540. Пусть A и B—заданные точки некоторой окружности и M—переменная точка той же окружности. На продолжении отрезка AM откладывают отрезок $MN = MB$. Найти геометрическое место точек N.

Глава XIII

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА ПОСТРОЕНИЕ

541. Провести в треугольнике ABC прямую, параллельную BC, так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами, был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.

542. Через данную точку M провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между параллельными прямыми AB и CD, был равен данному отрезку a.

543. В данный равносторонний треугольник ABC вписать другой равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершины его принадлежали сторонам данного треугольника, а стороны были бы перпендикулярны к сторонам данного треугольника.

544. Из точки A, взятой вне круга, провести секущую так, чтобы ее внешняя часть равнялась внутренней.

545. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы сумма получившихся хорд была бы равна данному отрезку.

546. Даны две концентрические окружности; провести прямую, на которой эти окружности отсекают две хорды, из которых одна вдвое длиннее другой.

547. На окружности даны две различные точки A и B. Провести через эти точки параллельные хорды, сумма которых равна данному отрезку (a).

548. Стороны угла ABC пересечены прямой DE. Построить отрезок, который своими концами упирается в стороны этого угла, перпендикулярен к прямой DE и делится ею пополам.

549. Через вершину B треугольника ABC провести отрезок BD (D принадлежит AC), длина которого была бы средней пропорциональной величиной между отрезками AD и DC.

550. На круглом бильярде радиуса R в точке M на расстоянии d от центра O находится шар. Ударить его так, чтобы он, отразившись два раза от борта, прошел через точку M, не проходя через центр.

551. Найти путь, по которому должен следовать бильярдный шар, чтобы, ударившись в два борта, прийти из A в B.

552. На прямоугольном бильярдном столе лежат два шара A и B. По какому направлению надо направить шар

A, чтобы он, отразившись от каждого из четырех бортов стола, ударил бы шар B.

553. На продолжении диаметра построить такую точку, чтобы длина касательной, проведенной из нее к окружности, равнялась диаметру.

554. Из точки, взятой вне круга, провести секущую так, чтобы она отсекала дугу, вмещающую данный угол.

555. Построить прямоугольный треугольник, зная длину a гипотенузы и длину k медианы BD, проведенной к катету AC.

556. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис равно данному отрезку m.

557. Построить треугольник ABC по основанию $AB=a$, высоте h, проведенной к основанию, и медиане m, проведенной к боковой стороне BC.

558. Построить треугольник по стороне a, сумме двух других сторон $(b+c)$ и разности углов при стороне a.

559. Построить треугольник по двум данным углам и сумме m медианы и высоты, выходящих из вершины третьего угла.

560. Построить треугольник по двум данным сторонам a и b и биссектрисе l_c угла между ними.

561. Построить треугольник ABC по данному углу B и двум медианам

$$AP=m_a$$

и

$$CQ=m_c.$$

562. Построить треугольник, зная его углы и радиус R описанной окружности.

563. Построить треугольник ABC по двум высотам h_a, h_b и медиане m_c, проведенной к третьей стороне.

564. Построить треугольник ABC по двум сторонам a и b, зная, что медианы m_a и m_b этого треугольника взаимно перпендикулярны.

565. Построить треугольник ABC по периметру P его ортоцентрического треугольника и по отношению высот

$$h_a:h_b:h_c=m:n:p,$$

где m, n, p—данные отрезки.

566. Построить треугольник ABC по основанию $AC=b$, углу B при вершине и точке D касания вписанной окружности со стороной AC.

567. Построить треугольник ABC по радиусу R окружности, описанной около этого треугольника, биссектрисе $AD=l$ и углу α между биссектрисой AD и стороной BC.

568. Построить треугольник ABC по высоте $AD=h$, периметру $2p$ и радиусу r вписанного круга.

569. Построить треугольник, если даны его периметр и два угла A и B.

570. Построить треугольник ABC по радиусу R описанной около него окружности, зная длины биссектрис $AN=l_1$ и $AP=l_2$ внутреннего и внешнего углов треугольника при вершине A (P—на продолжении стороны BC).

571. Построить треугольник по данной стороне $BC=a$, противолежащему ей углу $BAC=\alpha$ и радиусу r вписанного круга.

572. Построить треугольник ABC, зная положение одной из его вершин A, центра O описанной окружности и ортоцентра H.

573. На стороне BC треугольника ABC взята точка M. Провести через эту точку прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника на две равновеликие части.

Глава XIV

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

574. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а большее боковое ребро составляет с основанием угол β. В пирамиду вписан шар. Найти радиус шара.

575. Основанием пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник со сторонами $AB=AC=5$, $BC=6$; высота пирамиды проходит через середину BC и равна 1. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

576. Найти высоту треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны a, b, c, а все плоские углы при вершине прямые.

577. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $SABC$, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти сторону основания пирамиды.

578. Между двумя параллельными плоскостями заключен конус так, что его основание находится на одной из них, а вершина S—на другой. Угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину M оси проведена прямая, составляющая с ней угол β. Отрезок CD этой прямой между параллельными плоскостями равен d. Найти ее отрезок AB, заключенный внутри конуса.

579. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равно a и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр (цилиндр, у которого осевое сечение—квадрат) так, что боковой поверхностью он касается основания пирамиды вдоль диагонали этого основания, а окружности оснований цилиндра касаются боковых граней пирамиды. Найти радиус основания цилиндра.

580. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отсекает на этой образующей, считая от вершины, отрезок, в k раз больший радиуса шара.

581. На плоскости P стоит равносторонний конус (конус, у которого осевое сечение—равносторонний треугольник), высота которого равна h. Каждый из трех равных между собой шаров, лежащих на плоскости P внутри конуса, касается двух других шаров и боковой поверхности конуса. Найти радиус шаров.

582. В правильную n-угольную пирамиду, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α, вписан шар. Найти расстояние между точками, в которых шар касается двух соседних боковых граней пирамиды.

583. Из некоторой точки M пространства стороны треугольника ABC видны под прямыми углами. Найти расстояние от точки M до плоскости этого треугольника, если стороны его равны a, b, c.

584. Каждый плоский угол при вершине трехгранного угла равен 60°. В этот трехгранный угол вписаны два касательных друг к другу шара. Найти отношение их радиусов.

585. Ребро куба равно a. Найти радиус цилиндрической поверхности, осью которой служит диагональ куба,

если известно, что эта цилиндрическая поверхность касается ребра куба.

586. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, высота пирамиды равна h. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ним бокового ребра проведено сечение. Найти расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

587. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а угол между боковыми гранями равен φ.

588. На плоскости стоит круговой конус и вертикальный штатив. Радиус основания конуса равен 1 *м*, высота равна 2 *м*. Основание штатива отстоит от центра основания конуса на 2 *м*, а высота штатива равна 4 *м*. На вершине штатива помещен точечный источник света. Найти площадь тени конуса (не считая площади основания).

589. Основанием пирамиды $SABCD$ служит ромб с диагоналями $AC=a$ и $BD=b$. Боковое ребро SA перпендикулярно к плоскости основания и равно m. Через точку A и середину K ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD. Найти площадь сечения.

590. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися ребрами равно l. Найти объем этой пирамиды.

591. Найти объем параллелепипеда, если все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами α.

592. Высота прямого кругового конуса равна h. Две взаимно перпендикулярные образующие делят окружность основания на две дуги, одна из которых вдвое короче другой. Найти объем конуса.

593. В некоторой (неправильной) пирамиде все внутренние двугранные углы при основании равны α. Площадь основания равна S, а периметр основания равен $2p$. Найти объем и полную поверхность этой пирамиды.

594. Обе грани прямого двугранного угла пересечены плоскостью, образующей с каждой гранью угол α. Найти угол между линиями пересечения этой плоскости с гранями двугранного угла.

595. Найти двугранные углы трехгранного угла, плоские углы которого равны α, β и γ.

596. Найти плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды $SABC$, если центры шара, вписан-

ного в эту пирамиду, и шара, описанного около нее, совпадают.

597. Радиус шара, вписанного в усеченный конус, равен R, а радиус шара, описанного около этого усеченного конуса, равен $R\sqrt{30}$. Найти угол между образующей усеченного конуса и его основанием.

598. В равностороннем цилиндре точка окружности верхнего основания соединена отрезком с одной из точек окружности нижнего основания; угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен α. Найти угол между этим отрезком и осью цилиндра.

599. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

600. На плоскости лежат вокруг общей вершины n равных последовательно касательных конусов (каждый конус касается двух других). Найти угол при вершине осевого сечения каждого из этих конусов.

601. Доказать, что объем произвольного тетраэдра равен $V=\frac{1}{6}abc\sin\varphi$, где a и b — длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, φ — угол между ними, а c — кратчайшее расстояние между ними.

602. Пусть EF и KL — скрещивающиеся средние линии двух параллельных оснований произвольного параллелепипеда. Найти отношение объема пирамиды $EFLK$ к объему этого параллелепипеда.

603. Показать, что куб можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

604. Доказать, что плоский угол четырехгранного угла меньше суммы трех других.

605. Доказать, что не существует многогранника с нечетным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечетным числом сторон.

606. Доказать, что биссекторная плоскость двугранного угла треугольной пирамиды делит ее противоположное ребро в отношении, равном отношению площадей граней, образующих этот двугранный угол.

607. Показать, что если прямая имеет больше двух общих точек с цилиндрической или конической поверхностью, то она есть ее образующая.

608. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащих в одной плоскости. Пусть MN—отрезок, соединяющий их середины. Доказать, что

$$\frac{AD+BC}{2} > MN$$

(здесь AD, BC и MN—длины соответствующих отрезков).

609. Доказать, что отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

610. Если одна из высот (произвольной) треугольной пирамиды проходит через ортоцентр той грани, на которую она опущена, то и каждая из остальных трех высот проходит через ортоцентр соответствующей грани. Доказать.

611. Показать, что отрезки, соединяющие вершины любой треугольной пирамиды с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 1:3.

612. Построить параллелепипед, три ребра которого лежат на трех заданных прямых, попарно не лежащих в одной плоскости.

613. Найти во внутренней области трехгранного угла геометрическое место точек, равноудаленных от его граней.

614. Найти геометрическое место точек, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки A, лежащей вне прямой BC, на все плоскости, проходящие через эту прямую.

Глава XV

НЕРАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

615. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство

$$p^2 \geqslant 27r^2,$$

где p—полупериметр, r—радиус вписанного круга.

616. В треугольник ABC вписан круг, а в круг вписан правильный треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что периметр треугольника ABC не меньше удвоенного периметра треугольника $A_1B_1C_1$.

617. Доказать, что площадь четырехугольника не больше $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$, где a, b, c и d — его последовательные стороны.

618. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр.

619. Доказать, что площадь S треугольника ABC не больше $\left(\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\right)^2$, где a и b — стороны треугольника.

620. Доказать, что площадь треугольника не больше $\frac{1}{2}(a^2-ab+b^2)$, где a, b, c — стороны треугольника.

621. Доказать, что площадь S треугольника ABC не больше $\frac{a^2+b^2}{4}$, где a и b — стороны треугольника.

622. Доказать, что площадь S треугольника меньше шестой части суммы квадратов его сторон.

623. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые AM, BM, CM, пересекающие соответствующие стороны в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что имеет место неравенство

$$\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}\geqslant 6.$$

624. Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые AM, BM, CM, пересекающие соответствующие стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что имеет место неравенство

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}\geqslant 8.$$

625. Доказать, что во всяком треугольнике ABC между его площадью S и радиусами описанной окружности и вписанного круга существует соотношение

$$S>2\sqrt{R\cdot r^3}.$$

626. Доказать, что сумма боковых сторон треугольника превышает основание менее чем на удвоенный отрезок, соединяющий вершину с какой угодно точкой основания.

627. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы прилежащих сторон и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

628. Доказать, что сумма медиан треугольника заключена между его полупериметром и периметром.

629. На внешней биссектрисе угла C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $MA+MB>AC+BC$.

630. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника имеет место неравенство $0{,}4<\frac{r}{h}<0{,}5$, где r — радиус вписанного круга, h — высота, опущенная на гипотенузу.

631. Доказать, что между сторонами прямоугольного треугольника существует зависимость

$$\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}\leqslant c,$$

где a и b — катеты, а c — гипотенуза.

632. Доказать, что если между двумя сторонами a и b треугольника ABC и высотой h, опущенной из вершины C, существует зависимость $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}$, то $\angle C\leqslant 120°$.

633. Доказать, что если в треугольнике ABC между сторонами a и b и медианой m, проведенной из вершины C, существует зависимость $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m}$, то $\angle C\geqslant 120°$.

634. Доказать, что если углы A и B четырехугольника $ABCD$ равны, а угол D больше угла C, то

$$BC>AD.$$

635. Доказать, что расстояние между серединами диагоналей выпуклого четырехугольника не меньше модуля полуразности двух его противолежащих сторон.

636. Доказать, что площадь S четырехугольника не больше четверти суммы квадратов его сторон.

637. Доказать, что площадь четырехугольника не больше четверти суммы квадратов его диагоналей.

638. Доказать, что отношение k периметра ромба к сумме его диагоналей меньше 2 и не меньше $\sqrt{2}$.

639. Доказать, что отношение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, к периметру этого

треугольника принимает наибольшее значение, когда этот треугольник равнобедренный.

640. Доказать, что из всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь имеет квадрат.

641. Доказать, что из всех треугольников данной площади равносторонний имеет наименьший периметр.

642. Доказать, что из всех треугольников данного периметра $2p$ наибольшую площадь имеет равносторонний.

643. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую площадь.

644. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую биссектрису угла при вершине треугольника.

645. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным тупым углом при вершине равнобедренный имеет наименьшую медиану.

646. Доказать, что из всех треугольников с данным основанием и данным острым углом при вершине равнобедренный имеет наибольшую медиану.

647. Провести через вершину A треугольника ABC прямую EF так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин B и C была наибольшей.

648. На продолжении сторон AB и AC данного треугольника ABC отложим отрезки BD и CE, сумма которых равна третьей стороне. В каком случае отрезок DE будет наименьшим?

649. Из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны. Доказать.

650. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в данный треугольник, тот имеет наибольшую площадь, у которого сторона, параллельная высоте треугольника, равна половине этой высоты треугольника.

651. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет квадрат.

652. Дан квадрат $ABCD$ (см. рис. 204, стр. 405). От его вершин отложены равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd, и точки a, b, c, d соединены отрезками. При каком значении Aa площадь квадрата $abcd$ будет наименьшей?

653. В данный прямоугольный треугольник вписать прямоугольник с вершиной в вершине прямого угла и с наименьшей диагональю.

654. На одной стороне прямого угла задан отрезок AB. Найти на другой стороне точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом θ.

655. Даны прямая и две точки по одну сторону от нее. На этой прямой найти точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух данных точек была наименьшей.

656. Даны прямая a и две точки A и B по разные стороны от нее. Найти на прямой a такую точку, чтобы разность расстояний от нее до точек A и B была наибольшей.

657. На стороне треугольника найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух других сторон была наименьшей.

658. Внутри треугольника найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до сторон треугольника была наименьшей.

659. На полуокружности данного диаметра $AB=2R$ построить точку C так, чтобы произведение хорды AC на длину перпендикуляра CD, опущенного из этой точки на диаметр, принимало наибольшее значение.

660. На окружности даны две точки A и B. Найти на ней третью точку C так, чтобы произведение хорд $AC \cdot BC$ было наибольшим.

661. Найти внутри треугольника точку, произведение расстояний которой до сторон треугольника имело бы наибольшее значение.

662. Найти наименьшую хорду круга, которую можно провести через данную точку, взятую внутри этого круга.

663. По одну сторону от прямой xy даны две точки A и B. Расположить на прямой xy отрезок CD данной длины так, чтобы ломаная $ACDB$ была наименьшей длины.

664. Внутри острого угла xOy дана точка A. Построить треугольник наименьшего периметра такой, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой A, а две другие (B и C) лежали на сторонах угла xOy.

665. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

666. Из треугольников, имеющих данный угол, заключенный между сторонами, сумма которых постоянна, найти такой, который имеет наименьший периметр.

667. В данный сегмент вписать прямоугольник наибольшей площади.

668. Доказать, что из всех сечений куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящих через диагональ (BD_1), имеет наименьшую площадь то, которое проходит через середину (E) ребра (AA_1), скрещивающегося с этой диагональю (BD_1).

669. Доказать, что если в данный конус вписать цилиндр наибольшего объема, то радиус основания цилиндра относится к радиусу основания конуса, как 2:3.

670. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, тот цилиндр имеет наибольшую боковую поверхность, у которого осевое сечение есть квадрат.

671. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный конус, тот цилиндр имеет наибольшую боковую поверхность, у которого высота равна половине высоты данного конуса.

672. Доказать, что если в данный шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема, то отношение радиуса основания цилиндра к радиусу шара равно отношению $\sqrt{2}$ к $\sqrt{3}$.

673. Доказать, что если в данный шар вписан конус наибольшего объема, то радиус шара относится к высоте конуса, как 3:4.

674. Какую наибольшую боковую поверхность может иметь прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна a?

675. Из квадратного листа жести со стороной $6a$ требуется сделать коробку без крышки, вырезая по углам квадраты и загибая затем получающиеся выступы так, чтобы коробка получилась наибольшего объема. Какова должна быть длина стороны вырезанных квадратов?

676. Пусть AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная к AD, и из вершины B опущен перпендикуляр BB_1 на эту прямую. Доказать, что периметр треугольника BB_1C больше периметра треугольника ABC.

677. Доказать, что если площади квадрата и треугольника равны, то периметр треугольника больше периметра квадрата.

678. Имеется материал для постройки забора длиной в 300 *м*. Требуется огородить этим материалом прямоугольный загон наибольшей площади, используя для одной стороны загона стену амбара.

679. На какой высоте над круглым столом надо поместить лампу, чтобы она проектировалась в центр стола и чтобы на краях стола была наибольшая освещенность?

680. Между двумя городами A и B протекают две реки. Требуется построить кратчайший между A и B путь так, чтобы мосты через реки были перпендикулярны к берегам. (Берега каждой реки принимаются за параллельные прямые.)

Глава XVI

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИИ

681. Пусть A и B — острые положительные углы, удовлетворяющие равенствам

$$3\sin^2 A + 2\sin^2 B = 1, \quad 3\sin 2A - 2\sin 2B = 0.$$

Доказать, что $A + 2B = 90°$.

682. Доказать, что если имеет место равенство

$$\frac{a^2-1}{1+2a\cos\alpha+a^2} = \frac{1+2a\cos\beta+a^2}{a^2-1},$$

где $a > 1$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \pm\frac{1+a}{1-a}.$$

683. Доказать, что если имеет место равенство

$$\frac{\sin^4\alpha}{a} + \frac{\cos^4\alpha}{b} = \frac{1}{a+b},$$

где a и b имеют одинаковый знак, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$, то имеет место и равенство

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3} + \frac{\cos^8\alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

684. Пусть $x+y+z = \frac{\pi}{2}k$. Для каких целых значений k сумма

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}y\operatorname{tg}z + \operatorname{tg}z\operatorname{tg}x$$

не зависит от x, y и z?

685. Показать, что если

$$m\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta),$$

то выражение

$$y=\frac{1}{1-m\sin 2\alpha}+\frac{1}{1-m\sin 2\beta}$$

не зависит от α и β.

686. Доказать, что если

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\alpha)}{b}=\frac{\cos(x+2\alpha)}{c}=\frac{\cos(x+3\alpha)}{d},$$

то имеет место равенство $(a+c)c=(b+d)b$.

687. Доказать, что если $\cos x\neq 0$, то из равенства $\cos z=\cos x\cos y$ вытекает равенство

$$\operatorname{tg}\frac{z+x}{2}\operatorname{tg}\frac{z-x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}.$$

688. Доказать, что если $|A|<1$ и $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

689. Показать, что если α и β связаны соотношением

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m},$$

то имеет место пропорция

$$\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}\quad(|m|>|n|).$$

690. Доказать, что если имеет место зависимость

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z,$$

то $x+y+z=\pi k$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

691. Доказать, что если $\dfrac{\cos\alpha}{a}=\dfrac{\sin\alpha}{b}$, то выражение

$$A=a\cos 2\alpha+b\sin 2\alpha$$

не зависит ни от α, ни от b.

692. Доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha,$$

если

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta).$$

693. Доказать, что ни при каком значении α не имеет места равенство

$$\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha = 1.$$

694. Найти значение выражения

$$y = a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta),$$

если известно, что корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$ являются $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$.

695. Дано $\operatorname{tg}^2\alpha - a\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $a > 0$. Вычислить $\cos 2\alpha$.

696. Показать, что если имеет место соотношение

$$\frac{\cos x - \cos\alpha}{\cos x - \cos\beta} = \frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2\beta\cos\alpha} \text{ и } x \neq (2n+1)\pi,$$

то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

697. Выразить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ через A и B при условии, что

$$\sin\alpha = A\sin\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta,$$
$$|B| \neq 1 \text{ и } A \neq 0.$$

698. Доказать, что если

$$\cos A = \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos B = \cos\beta\sin\gamma, \quad \cos C = \cos\gamma\sin\alpha,$$
$$A + B + C = \pi,$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 1.$$

699. Доказать, что если

$$A_1 = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$B_1 = 2C\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2A\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$C_1 = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

то $B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$.

700. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют равенству

$$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0,$$

то стороны треугольника связаны зависимостью

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

701. Доказать, что если между углами треугольника ABC существует зависимость

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B - \sin C) = 3 \sin A \sin B,$$

то $\angle C = 60°$.

702. Найти сумму $\sin^5 x + \cos^5 x$, если известно, что $\sin x + \cos x = a$.

703. Показать, что

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = \\ = 4 \sin p \sin (p - a) \sin (p - b) \sin (p - c),$$

где $2p = a + b + c$.

704. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = (-1)^{n+1} 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma,$$

где n — целое число.

705. Доказать, что

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin (60° - \alpha) \sin (60° + \alpha).$$

706. Доказать, что

$$\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cos (60° - \alpha) \cos (60° + \alpha).$$

707. Доказать, что

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60° - \alpha) \operatorname{tg} (60° + \alpha).$$

708. Вычислить без таблиц $\sin 18°$ и $\cos 18°$.

709. Вычислить без таблиц $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81°$.

710. Доказать, что

$$\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° - \cos 12° = \frac{1}{2}.$$

711. Доказать, что

$$\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° = \cos 7°.$$

712. Вычислить без таблиц выражение

$$\frac{1 - 4 \sin 10° \sin 70°}{2 \sin 10°}.$$

713. Доказать равенство

$$\operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 80° = 3.$$

714. Доказать равенство

$$\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}.$$

Глава XVII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

715. Решить уравнение

$$\cos x \operatorname{tg} 3x = 0.$$

716. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x = 0.$$

717. Доказать, что уравнение

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$$

не имеет решений.

718. Доказать, что уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x} = 0$$

не имеет решений.

719. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x} = 0.$$

720. Доказать, что уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

не имеет решений.

721. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = (2 + \sqrt{5}) \operatorname{tg} x.$$

722. Доказать, что уравнение

$$\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$$

не имеет решений.

723. Решить уравнение

$$\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

724. Показать, что не существует угла треугольника, удовлетворяющего уравнению

$$\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{3}.$$

725. Доказать, что уравнение

$$\sin 2x\sin 6x=1$$

не имеет корней.

726. При каких значениях a уравнение

$$\cos\left(mx+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(mx-\frac{\pi}{6}\right)=a$$

имеет корни?

727. Показать, что уравнение

$$\operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+45^\circ)=\frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$$

не имеет решений.

728. Решить уравнение

$$\sin x\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}},$$

где радикал берется в арифметическом смысле.

729. Решить уравнение

$$\sin ax\sin bx=\sin mx\sin nx,$$

если числа a, b, m и n положительны и являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии.

730. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{2},\\[2ex] \dfrac{\cos x}{\cos y}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}.\end{cases}$$

731. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=\alpha,\\ \sin x\sin y=m.\end{cases}$$

732. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y, \end{cases}$$

где x и y — острые положительные углы.

733. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x.$$

734. Решить уравнение

$$2 \cos x - \cos \frac{3x}{2} = 1.$$

735. Показать, что уравнение

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(\sin x + \cos x + 1)$$

не имеет решений.

736. Решить уравнение

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x = 1,$$

где n — целое положительное число.

737. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

738. Решить уравнение

$$\cos^2 (x + \alpha) + \cos^2 (x - \alpha) = \sin 2\alpha,$$

если $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

739. При каких значениях a уравнение

$$\sin bx \sin cx = \sin^2 \left(\frac{b+c}{2} x\right) + a$$

имеет корни?

740. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 2x = m \sin x.$$

741. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \frac{8 \sin^2 x + 3 \sin 2x + 1}{8 \cos^2 x + 3 \sin 2x + 1} = 0.$$

742. Решить уравнение

$$\sin x - \frac{5\cos^4 x - 20\cos^2 x + 16}{\cos^4 x - 12\cos^2 x + 16} = 0.$$

743. Показать, что уравнение

$$\sin^4 x - \sin^2 3x + \sin x - 3 = 0$$

не имеет решений.

744. Решить уравнение

$$(\sin 2x + 3)\sin^4 x - (\sin 2x + 3)\sin^2 x + 1 = 0.$$

745. Доказать, что уравнение

$$4\sin^4 3x - 3\cos x + 5 = 0$$

не имеет решений.

746. Решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a.$$

Определить значения a, при которых уравнение имеет решения.

747. Решить уравнение

$$1 + \cos 6x = 32\cos^6 x.$$

748. Решить уравнение

$$\sin^5 x - \cos^5 x = \sec x - \operatorname{cosec} x.$$

749. Решить уравнение

$$16\sin^5 x = \sin 5x + 5\sin x.$$

750. Решить уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

751. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x^2 = 0.$$

752. Решить уравнение

$$\cos x^2 = \frac{1}{2}.$$

753. Решить уравнение

$$\cos\sqrt{49 - x^2} = 1.$$

754. Показать, что уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)=2$$

не имеет решений.

755. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(x^2-x)\operatorname{ctg}2=1.$$

756. Решить уравнение

$$\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2.$$

757. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

758. Показать, что уравнение

$$3\cos x=|\cos x|-5$$

не имеет решений.

759. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos x}{1-\sin|x|}.$$

760. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

761. Показать, что целочисленные решения уравнения

$$\cos(2\pi x)=\cos(\pi x^2)$$

являются четными числами.

762. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos\pi x\cos\pi y=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ x+y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

763. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi\cos\pi x\right)=\frac{1}{2}.$$

764. Решить уравнение

$$\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x).$$

765. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x).$$

766. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m, \\ x + y = \alpha. \end{cases}$$

767. Исключить t из системы уравнений

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t + 3a\cos t \sin^2 t, \\ y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t \sin t. \end{cases}$$

768. Исключить x из системы уравнений

$$\begin{cases} m \operatorname{ctg} x = a, \\ n \operatorname{cosec} 2x = b. \end{cases}$$

769. Исключить α из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos(\beta + \alpha) = m, \\ \cos(\beta - \alpha) = n. \end{cases}$$

770. Исключить x из системы уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x = \dfrac{y}{a}, \\ \sin x + \sin 2x = \dfrac{z}{b}. \end{cases}$$

771. Исключить x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1, \\ a\cos^2 y + b\sin^2 y = 1, \\ a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y, \end{cases}$$

где $a \neq b$.

772. Исключить α и β из системы уравнений

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\beta = a, \\ x\sin\beta - y\cos\alpha = b, \\ (x^2 + y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab. \end{cases}$$

773. Решить уравнение

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

774. Решить уравнение

$$(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = \sec 2x.$$

775. Решить уравнение

$$\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1.$$

776. Решить уравнение

$$1 + \log_2 \sin x + \log_2^2 \sin x + \log_2^3 \sin x + \ldots = \frac{2}{3}.$$

777. Решить уравнение

$$\sin^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}.$$

Глава XVIII

НЕРАВЕНСТВА В ТРИГОНОМЕТРИИ. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

778. Даны A, B, C — углы треугольника. Доказать, что

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

779. Доказать, что

$$\cos(m+n)\cos(m-n) \leqslant \cos^2 m.$$

780. Доказать, что если $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то имеет место неравенство

$$1 + \operatorname{ctg}\alpha \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

781. Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ имеет место неравенство

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8.$$

782. Доказать, что при любых допустимых значениях α имеет место неравенство

$$(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)(3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)(\operatorname{ctg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha - 1) \leqslant -1.$$

783. Доказать, что

$$\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg} \alpha,$$

если n — натуральное число, большее 1, а угол α удовлетворяет неравенству

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}.$$

784. Доказать, что

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2},$$

если

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

785. Доказать, что

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2},$$

если

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi.$$

786. Доказать, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2},$$

если

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

787. Доказать, что если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то

$$\alpha - \sin \alpha < \beta - \sin \beta.$$

788. Доказать, что если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} \alpha - \alpha < \operatorname{tg} \beta - \beta.$$

789. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то имеют место неравенства

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

790. Доказать, что $\cos x \leqslant \cos^{2^n}\left(\frac{x}{2^n}\right)$, если

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

791. Доказать неравенство

$$\sin 36^\circ \cdot \sin 54^\circ < \frac{5(\sqrt{5}-1)}{4\pi}.$$

792. Доказать, что

$$\sin(\cos\varphi) < \cos(\sin\varphi)$$

при любом значении φ.

793. Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} > 0$$

при всех допустимых значениях α.

794. Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \geqslant \frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

если

$$2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi, \quad 2m\pi < \beta < (2m+1)\pi.$$

795. Доказать, что имеет место неравенство

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta \geqslant \sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha+\sin\beta-1.$$

При каких α и β имеет место знак равенства?

796. Доказать, что для тупоугольного треугольника ABC имеет место неравенство

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C > 1.$$

797. Доказать, что

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} < \cos^{2n+1} x \quad (n\text{—натуральное число}),$$

если $0 < (n+1)x < \frac{\pi}{2}$.

798. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha = n\operatorname{tg}\beta$, где $n > 0$, то

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) \leqslant \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

799. Доказать, что если α, β, γ—острые углы, то имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta) \geqslant 6.$$

800. Доказать, что $x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$, если

$$\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

801. Доказать, что если A, B и C — углы треугольника с тупым углом C, то $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B<1$.

802. Доказать, что имеет место неравенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>1$, если α и β — углы остроугольного треугольника.

803. Доказать, что если

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2},\quad 0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2},$$

то имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha<1.$$

804. Доказать, что если

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\quad 0<\gamma<\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha<1,$$

то имеет место неравенство

$$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

805. Доказать, что имеет место неравенство

$$\sin\frac{1}{n-1}+\sin\frac{1}{n+1}-2\sin\frac{1}{n}>0,$$

где $n\geqslant 2$.

806. Доказать, что

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{27}{256}.$$

807. Доказать, что

$$z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)<\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

если $0\leqslant x\leqslant\pi$ и $0\leqslant y\leqslant\pi$.

808. Доказать, что имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n,$$

если $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$.

809. Пусть

$$y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x.$$

Доказать, что имеет место соотношение

$$\frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}.$$

810. Доказать, что

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 > 2\pi\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

где α, β, γ — углы треугольника.

811. Доказать, что имеет место неравенство

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5} \leqslant 4\sqrt{3},$$

если α, β, γ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

812. Числа α, β, γ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Доказать, что имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma \geqslant \frac{26}{27}.$$

813. Доказать, что имеет место неравенство

$$-4 \leqslant \cos 2x + 3\sin x \leqslant 2\frac{1}{8}.$$

814. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

815. Найти наименьшее значение выражения

$$y = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos 2\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right).$$

816. Найти максимум функции

$$y = \frac{3\sin^2 x\,(1-4\sin^2 x)}{\cos^4 x},$$

если $0 < |x| < \frac{\pi}{6}$.

817. Найти наибольшее значение функции

$$y=\sin^2 x\ \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right),$$

где $0<|x|<\frac{\pi}{3}$.

818. Найти наибольшее значение функции

$$y=\frac{(\cos^3 x-\cos 3x)(\sin^3 x+\sin 3x)}{\sin 2x},$$

если $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$.

819. Найти наибольшее значение функции

$$y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{60^\circ+x}{2},$$

если $0^\circ<x<90^\circ$.

820. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$y=(3\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3)\ \cos^2\frac{\alpha}{2},\ \text{где}\ \alpha\neq\pi(2k+1).$$

821. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\sin x>\frac{1}{2},\\ \cos x\geqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

822. Доказать, что

$$\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$$

существует тогда и только тогда, когда $\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Решить неравенства (823—849):

823. $\lg_{10}\sin x\leqslant 0$.

824. $\cos(\sin x)>0$.

825. $\sin(\cos x)<0$.

826. $\sin x+a\cos x<a$; $a\neq 0$.

827. $\operatorname{tg} x\,(1+\cos 2x)<\cos 2x\operatorname{tg} 2x$.

828. $2\sin x\sin 3x>1$.

829. $\sin x+\cos x<\sqrt{2}$.

830. $\sin 5x>16\sin^5 x$.

831. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x>1+\operatorname{tg} x$.

832. $\operatorname{tg} 2x<\sin x+\operatorname{tg} x$.

833. $2\sin^2 3x+\sin^2 6x<2$.

834. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 2$.

835. $\sin \frac{1}{x^2} > 0$.

836. $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$.

837. $\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}$.

838. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$.

839. $\operatorname{tg} x > \frac{\operatorname{tg} 2x - 2}{\operatorname{tg} 2x + 2}$.

840. $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0 \quad (0 < x < 2\pi)$.

841. $4 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2{,}5 \sec^2 \frac{x}{2} \geqslant 0$.

842. $\cos x > \sin^2 x - \cos^2 x$.

843. $\sin^2 2x > \sin^2 x + \frac{1}{4}$.

844. $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$.

845. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$.

846. $4 \sin x \sin 3x < 1$.

847. $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg}^3 x < 7{,}875$.

848. $\sin^4 x - 6 \sin^2 x + 4 > 0$.

849. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x > 0$.

Глава I

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМА БЕЗУ

1. Пусть $n=2k+1$, тогда $n^4+7(7+2n^2)=n^4+2\cdot 7n^2+7^2=$ $=(n^2+7)^2=[(2k+1)^2+7]^2=[4k(k+1)+8]^2$. Так как произведение $k(k+1)$ кратно двум, то $4k(k+1)$ делится на 8, следовательно, делится на 8 и $[4k(k+1)+8]$; поэтому $[4k(k+1)+8]^2$ кратно 64.

2. Из трех последовательных натуральных чисел $(n-1)$, n и $(n+1)$ одно делится на 3, но так как по условию задачи n — число простое, отличное от 2 и 3, то на 3 делится либо $(n-1)$, либо $(n+1)$; ясно также, что $(n-1)$ и $(n+1)$ являются двумя последовательными четными числами, т. е. одно из них делится на 2, а другое на 4.

Итак, $(n^2-1)=(n-1)(n+1)$ делится на 8 и на 3. Следовательно, n^2-1 кратно 24.

3. Так как числа a и b взаимно просты с числом 3, то a^2 и b^2 при делении на 3 дадут в остатке единицу, а следовательно, при делении a^2+b^2 на 3 получится остаток 2, т. е. a^2+b^2 не делится на 3.

4. Имеем

$$n(n^2+5)=n(n^2-1+6)=n(n-1)(n+1)+6n.$$

Так как произведение трех последовательных целых чисел кратно 6, т. е. $n(n-1)(n+1)=6k$, где k — целое, то $n(n-1)(n+1)+6n=$ $=6(k+n)$, т. е. $n(n^2+5)$ делится на 6.

5. Имеем

$$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=$$
$$=n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Итак, заданное выражение есть произведение пяти последовательных целых чисел.

Среди пяти последовательных целых чисел имеется хотя бы два четных числа, одно из которых делится на 4; следовательно, данное выражение делится на 8. Далее, среди трех последовательных целых чисел одно кратно 3, поэтому данное выражение делится на 3, и, наконец, из пяти последовательных целых чисел одно кратно 5.

Поскольку данное выражение делится на 8, 3 и 5, то оно делится на 120.

6. Так как n взаимно простое с 6, то оно нечетное, поэтому $(n-1)$ и $(n+1)$ — два последовательных четных числа и их произведение делится на 8. Также ясно, что одно из них делится на 3, поскольку n не делится на 3. Итак, n^2-1 делится на 3 и на 8, т. е. оно делится на 24.

7. Имеем

$$n^4+6n^3+11n^2+6n=n(n^3+6n^2+11n+6)=$$
$$=n[n^2(n+1)+5n(n+1)+6(n+1)]=n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Известно, что среди трех последовательных целых чисел одно делится на 3 и что произведение двух последовательных четных чисел кратно 8. Следовательно, произведение четырех последовательных чисел делится на 24.

8. Имеем

$$6^{2n}-1=36^n-1.$$

Выражение 36^n-1 делится на $36-1$, т. е. делится на 35.

9. Имеем

$$7^{n+2}+8^{2n+1}=7^{n+2}+8^{2n+1}+7^n\cdot 8-7^n\cdot 8=$$
$$=7^n(7^2+8)+8(64^n-7^n)=57\cdot 7^n+8(64^n-7^n).$$

Так как 64^n-7^n делится на $64-7=57$, то и заданное число кратно 57.

10. Представим данное выражение так:

$$(121^n-64^n)(n^4-1).$$

Так как n не делится на 5, то $n=5k\pm 1$ или $n=5m\pm 2$. В обоих этих случаях n^4-1 кратно пяти. А так как 121^n-64^n кратно $121-64=57$, то все выражение делится на произведение $57\cdot 5=285$.

11. Имеем

$$5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5\cdot 5^{2n}+2^{n+1}(2^3+1)=$$
$$=5\cdot 5^{2n}+18\cdot 2^n=5\cdot 5^{2n}-5\cdot 2^n+5\cdot 2^n+18\cdot 2^n=$$
$$=5(5^{2n}-2^n)+23\cdot 2^n.$$

Так как $5^{2n}-2^n$ делится на $23=5^2-2$, то и данное выражение кратно 23.

12. Имеем

$$2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}=2^5\cdot 2^n(3^4)^n+5(5^3)^n=$$
$$=2^5(2\cdot 3^4)^n+5\cdot 125^n=2^5\cdot 162^n+5\cdot 125^n=$$
$$=32(162^n-125^n)+37\cdot 125^n.$$

Разность 162^n-125^n делится на разность $162-125=37$, следовательно, данное число кратно 37.

13. Имеем

$$3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1}=3^2(3^3)^n+5\cdot 2(2^3)^n=$$
$$=9\cdot 27^n+10\cdot 8^n-19\cdot 8^n+19\cdot 8^n=$$
$$=9(27^n-8^n)+19\cdot 8^n.$$

Разность одинаковых степеней $27^n - 8^n$ кратна разности $27 - 8 = 19$ и член $19 \cdot 8^n$ тоже кратен 19, значит, и данное выражение кратно 19.

14. Представим данное выражение в виде

$$7^{n+2} + 8^{2n+1} + 7^n \cdot 8 - 7^n \cdot 8 = (7^{n+2} + 7^n \cdot 8) + (8^{2n+1} - 7^n \cdot 8) = 7^n (7^2 + 8) + 8[(8^2)^n - 7^n] = 57 \cdot 7^n + 8(64^n - 7^n).$$

Число $(64^n - 7^n)$ кратно разности $64 - 7 = 57$ и член $57 \cdot 7^n$ тоже кратен 57, а потому и все рассматриваемое выражение делится на 57 при всяком неотрицательном целом n. Но при $n = 0$ заданное выражение равно $7^2 + 8 = 57$, так что искомый наибольший делитель равен 57.

15. Имеем

$$2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} = 2^3 (2^5)^n + 3^2 (5 \cdot 3)^n = 8 \cdot 32^n + 9 \cdot 15^n = 8 \cdot 32^n + 9 \cdot 15^n - 17 \cdot 15^n + 17 \cdot 15^n = 8(32^n - 15^n) + 17 \cdot 15^n.$$

При целом неотрицательном n разность $32^n - 15^n$ кратна разности $32 - 15 = 17$ и член $17 \cdot 15^n$ тоже кратен 17, а поэтому и все данное выражение кратно 17.

16. Имеем

$$3(5^{2n+1} + 3^{4n-5}) + 2^{3n}(2 - 2^{3n-6}) = 3 \cdot 5^{2n+1} + 3^{4n-4} + 2 \cdot 2^{3n} - 2^{6n-6} = 3 \cdot 5 (5^2)^n + 2 (2^3)^n + [(3^4)^{n-1} - (2^6)^{n-1}] = 15 \cdot 25^n + 2 \cdot 8^n + (81^{n-1} - 64^{n-1}) = 15 \cdot 25^n - 15 \cdot 8^n + 15 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n + (81^{n-1} - 64^{n-1}) = 15(25^n - 8^n) + 17 \cdot 8^n + (81^{n-1} - 64^{n-1}).$$

При натуральном n разность $25^n - 8^n$ кратна разности $25 - 8 = 17$; разность $81^{n-1} - 64^{n-1}$ при $n = 1$ есть нуль, а при $n > 1$ кратна разности $81 - 64 = 17$; член $17 \cdot 8^n$ кратен 17. Итак, рассматриваемое число кратно 17.

17. Имеем

$$3^{2(n+1)} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n} = 3^2 (3^{2n} \cdot 5^{2n} - 3^{3n} \cdot 2^{2n}) = 9(225^n - 108^n).$$

Отсюда следует, что заданное выражение кратно девяти. Но так как $225^n - 108^n$ делится на разность $225 - 108 = 117$, то заданное выражение делится и на произведение $9 \cdot 117 = 1053$.

18. Имеем

$$5^{2n+1} + 3^2 \cdot 2^{n+1}(1 + 18^{n-1}) - 13^n = 5^{2n} \cdot 5 + 3^2 \cdot 2^n \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 \cdot 18^{n-1} \cdot 2^n - 13^n = 5 \cdot 25^n + 18 \cdot 2^n + 18^n \cdot 2^n - 13^n = 5 \cdot 25^n - 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^n + 18 \cdot 2^n + (18 \cdot 2)^n - 13^n = 5(25^n - 2^n) + 23 \cdot 2^n + (36^n - 13^n).$$

Замечая, что разности $(25^n - 2^n)$ и $(36^n - 13^n)$ делятся на $25 - 2 = 36 - 13 = 23$, мы приходим к выводу, что рассматриваемое число кратно 23.

Вернемся к выражению, заданному в условии задачи. Разность $(5^{2^n+1}-13^n)$ как разность двух нечетных чисел есть число четное; число $3^2\cdot 2^{n+1}(1+18^{n-1})$ также кратно 2 при целом положительном n, а потому все рассматриваемое число тоже кратно 2. Итак, данное число кратно 2 и 23, а значит, кратно и их произведению, т. е. 46.

19. Имеем

$$222^{333}+333^{222}=111^{333}\cdot 2^{333}+111^{222}\cdot 3^{222}=$$
$$=111^{222}\cdot[111^{111}\cdot(2^3)^{111}+(3^2)^{111}]=111^{222}(888^{111}+9^{111}).$$

Число $(888^{111}+9^{111})$ есть сумма нечетных степеней. Эта сумма разлагается на множители, из которых один равен $888+9$, т. е. 897. Заметим, что 897 делится на 13, поэтому и число $222^{333}+333^{222}$ также делится на 13.

20. Имеем

$$3^{105}+4^{105}=(3^3)^{35}+(4^3)^{35}.$$

Это выражение делится на сумму $3^3+4^3=27+64=91$, а 91 делится на 13; следовательно, $3^{105}+4^{105}$ делится на 13.

Аналогично имеем

$$3^{105}+4^{105}=(3^5)^{21}+(4^5)^{21}.$$

Это выражение делится на сумму $3^5+4^5=243+1024=1267=$ $=181\cdot 7$, а поэтому $3^{105}+4^{105}$ делится на 181 и на 7.

21. Первое решение. Имеем

$$4^n+15n-1=(1+3)^n+15n-1=$$
$$=1+C_n^1\cdot 3+C_n^2\cdot 3^2+\ldots+C_n^n\cdot 3^n+15n-1=$$
$$=15n+n\cdot 3+C_n^2\cdot 3^2+\ldots+C_n^n\cdot 3^n=$$
$$=18n+C_n^2\cdot 3^2+\ldots+C_n^n\cdot 3^n.$$

Каждое слагаемое последней суммы делится на 9, следовательно, и вся эта сумма, т. е. выражение $4^n+15n-1$, делится на 9, что и требовалось доказать.

Второе решение. Проведем доказательство методом математической индукции *).

1) При $n=1$ заданное выражение примет вид $4+15-1$, т. е. оно равно 18 и делится на 9.

2) Предположим, что заданное число делится на 9 при $n=k$, т. е. что

$$4^k+15k-1=9p. \qquad (1)$$

Остается доказать, что если имеет место (1), то и

$$4^{k+1}+15(k+1)-1 \qquad (2)$$

делится на 9

Из (1) находим

$$4^k=9p-15k+1.$$

---

*) Рекомендуем читателю ознакомиться с книжкой: И. С. Соминский, Метод математической индукции, «Наука», 1965.

Подставим это значение 4^k в (2).

Имеем

$$4(9p-15k+1)+15(k+1)-1=36p-45k+18=9(4p-5k+2),$$

т. е. $4^{k+1}+15(k+1)-1$ делится на 9, что и требовалось доказать.

22. Первое решение. Имеем

$$3^{2n+2}\cdot 4+32n-36=4(3^{2n+2}+8n-9).$$

Следовательно, заданное число кратно четырем, а поэтому остается доказать, что

$$3^{2n+2}+8n-9$$

делится на 16.

Рассмотрим отдельно случаи, когда n четное и n нечетное.

1) Пусть $n=2k$ — четное число, тогда

$$3^{2n+2}+8n-9=3^{4k+2}+16k-9=$$
$$=3^{4k}\cdot 3^2-9+16k=9[(3^4)^k-1]+16k=9(81^k-1)+16k.$$

Разность 81^k-1 делится на разность $81-1=80$, а потому и на 16; следовательно, при n четном число $3^{2n+2}+8n-9$ кратно 16.

2) Пусть n — нечетное число, т. е. $n=2k+1$, тогда

$$3^{2n+2}+8n-9=3^{4k+4}+16k+8-9=(3^4)^{k+1}-1+16k=$$
$$=81^{k+1}-1+16k.$$

Но $81^{k+1}-1$ кратно $81-1=80$, следовательно, $3^{2n+2}+8n-9$ и при n нечетном кратно 16.

Второе решение. 1) При $n=0$ данное число равно $3^2\cdot 4+0-36=0$, что кратно 64.

2) Допустим, что при $n=k$ данное число кратно 64, т. е.

$$3^{2k+2}\cdot 4+32k-36=64a.$$

Докажем, что тогда и при $n=k+1$ данное число, равное $3^{2k+4}\cdot 4+32k+32-36$, кратно 64.

Действительно,

$$3^{2k+4}\cdot 4+32k+32-36=3^{2k+2}\cdot 36+32k+32-36=$$
$$=(3^{2k+2}\cdot 4+32k-36)+32(3^{2k+2}+1). \quad (1)$$

Имеем $3^{2k+2}\cdot 4+32k-36$ кратно 64 по предположению, $32(3^{2k+2}+1)$ тоже кратно 64, так как $3^{2k+2}+1$ — четное число (как сумма двух нечетных чисел).

Поскольку оба слагаемых правой части (1) кратны 64, то (1) кратно 64.

Итак, $3^{2n+2}\cdot 4+32n-36$ делится на 64 при любом целом неотрицательном n.

23. Первое решение. Данное выражение можно представить так:

$$3\cdot 4\cdot 3^{2n}(2^3)^{2n}\cdot 2^{2n}-12\cdot 2^{2n}+12\cdot 2^{2n}+4^{n+1}+$$
$$+9\cdot 2^{2n}-9\cdot 2^{2n}+3^2(3^3)^{2n}=12\cdot 2^{2n}(3\cdot 2^3)^{2n}-$$
$$-12\cdot 2^{2n}+(12\cdot 2^{2n}+4\cdot 2^{2n}+9\cdot 2^{2n})+9(27^{2n}-2^{2n})=$$
$$=12\cdot 2^{2n}(24^{2n}-1^{2n})+25\cdot 2^{2n}+9(27^{2n}-2^{2n}).$$

При целом неотрицательном n разность четных степеней $24^{2n}-1^{2n}$ кратна сумме $24+1=25$; разность $27^{2n}-2^{2n}$ одинаковых степеней кратна разности $27-2=25$; член $25\cdot 2^{2n}$ делится на 25. Значит, и все данное выражение кратно 25.

Второе решение. 1) При $n=0$ данное выражение, равное $3\cdot 4+3^2+4=25$, кратно 25. 2) Предположим, что при $n=k$ данное выражение кратно 25, т. е.

$$3^{2k+1}\cdot 4^{4k+1}+3^{6k+2}+4^{k+1}=25a.$$

Докажем, что тогда и при $n=k+1$ данное выражение кратно 25.

Действительно, при $n=k+1$ данное выражение равно

$$\begin{aligned}3^{2k+3}\cdot 4^{4k+5}+3^{6k+8}+4^{k+2}&=3^{2k+1}\cdot 4^{4k+1}\cdot 2304+\\&+3^{6k+2}\cdot 729+4^{k+1}\cdot 4=4\left(3^{2k+1}\cdot 4^{4k+1}+3^{6k+2}+4^{k+1}\right)+\\&+3^{2k+1}\cdot 4^{4k+1}\cdot 2300+3^{6k+2}\cdot 725=4\cdot 25a+\\&+25\left(3^{2k+1}\cdot 4^{4k+1}\cdot 92+3^{6k+2}\cdot 29\right),\end{aligned}$$

что кратно 25.

В силу изложенного заключаем, что утверждение задачи верно.

24. Имеем

$$3^{2n+2}-8n-9=3^2\left(3^2\right)^n-8n-9=9(1+8)^n-8n-9.$$

Далее

$$\begin{aligned}(1+8)^n&=1^n+8n+C_n^2 8^2+C_n^3 8^3+\ldots+C_n^{n-1}8^{n-1}+\\&+C_n^n 8^n=1+8n+64k,\end{aligned}$$

где $k=C_n^2+C_n^3 8+\ldots+C_n^{n-1}8^{n-3}+C_n^n 8^{n-2}$ — целое положительное число. Значит,

$$\begin{aligned}3^{2n+2}-8n-9&=9(1+8n+64k)-8n-9=\\&=9+72n+9\cdot 64k-8n-9=64(9k+n),\end{aligned}$$

т. е. данное выражение кратно 64.

25. 1) Пусть $x=3n+1$, тогда

$$1+2^x+4^x=1+2^{3n+1}+4^{3n+1}=1+2\cdot 8^n+4\cdot 64^n. \qquad (1)$$

Разложив $8^n=(7+1)^n$ и $64^n=(63+1)^n$ по формуле бинома, найдем, что первое число имеет вид $7a+1$, а второе $7b+1$, где a и b — целые числа.

Подставляя эти выражения в (1), найдем, что

$$\begin{aligned}1+2^x+4^x&=1+2(7a+1)+4(7b+1)=\\&=1+14a+2+28b+4=14a+28b+7\end{aligned}$$

кратно семи.

2) Поскольку числа вида $3n-1$ и $3n+2$ идентичны, можно вместо $3n-1$ рассматривать $3n+2$.

Поступая так же, как и в случае 1), найдем, что $1+2^x+4^x=28a+112b+21$ кратно семи.

26. Первое решение. Имеем

$$6^{2n}+3^{n+2}+3^n=2^{2n}\cdot 3^{2n}+3^2\cdot 3^n+3^n=$$
$$=3^n(4^n\cdot 3^n+3^2+1)=3^n(12^n+10)=$$
$$=3^n[(11+1)^n+10]=3^n(11^n+n\cdot 11^{n-1}+\ldots+11n+1+10)=$$
$$=3^n(11^n+n\cdot 11^{n-1}+\ldots+11n+11),$$

что, очевидно, кратно 11.

Второе решение. Имеем

$$6^{2n}+3^{n+2}+3^n=3^n(12^n+10)=$$
$$=3^n[(12^n-1^n)+11]=3^n[(12-1)\cdot a+11]=3^n\cdot 11\,(a+1),$$

что кратно 11.

27. При $x=0$ выражение примет вид $7^0-4\cdot 3^0+3\cdot 2^0=0$, т. е. при $x=0$ данное выражение кратно 11.

Пусть $x=2k$ — четное положительное число. Имеем

$$7^{6k}-4\cdot 3^{4k}+3\cdot 2^{2k}=7^{6k}-3^{4k}-(3\cdot 3^{4k}-3\cdot 2^{2k})=$$
$$=[(7^3)^{2k}-(3^2)^{2k}]-3[(3^2)^{2k}-2^{2k}]=(343^{2k}-9^{2k})-3(9^{2k}-2^{2k}).$$

Разности $343^{2k}-9^{2k}$ и $9^{2k}-2^{2k}$ четных степеней кратны соответственно числам $343+9=11\cdot 32$ и $9+2=11$.

Пусть теперь x — нечетное положительное число. Имеем

$$7^{3x}-4\cdot 3^{2x}+3\cdot 2^x=(7^{3x}+3^{2x})-3^{2x}-4\cdot 3^{2x}+$$
$$+(3\cdot 2^x+3\cdot 3^{2x})-3\cdot 3^{2x}=[(7^3)^x+(3^2)^x]+3[2^x+(3^2)^x]-8\cdot 3^{2x}.$$

Числа $(7^3)^x+(3^2)^x$ и $2^x+(3^2)^x$ как суммы нечетных степеней кратны соответственно $7^3+3^2=11\cdot 32$ и $2+3^2=11$, но число $8\cdot 3^{2x}$ не кратно 11, а потому и все рассматриваемое число в случае нечетного x не кратно 11.

Итак, рассматриваемое выражение кратно 11 только при x, равном четному (включая 0) числу.

Отв. $x=2k$, где $k=0, 1, 2, \ldots$

28. Имеем

$$1+3^{3k+1}+9^{3k+1}=1+3\cdot 27^k+9\cdot 27^{2k}.$$

При делении 27^k на 13 получается остаток 1, следовательно, при делении $3\cdot 27^k$ на 13 получается остаток 3. Аналогично при делении 27^{2k} на 13 получается остаток 1, следовательно, $9\cdot 27^{2k}$ при делении на 13 дает остаток 9.

Итак, при делении $1+3\cdot 27^k+9\cdot 27^{2k}$ на 13 получается остаток $1+3+9=13$, т. е. $1+3^{3k+1}+9^{3k+1}$ делится на 13.

29. Имеем

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=$$
$$=(x-a)(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots+B_{n-2}x+B_{n-1})+R,$$

или

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=$$
$$=B_0x^n+(B_1-B_0a)x^{n-1}+(B_2-B_1a)x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+(B_{n-1}-B_{n-2}a)x+(R-B_{n-1}a).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем, что

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_1 - B_0 a &= A_1, \\ B_2 - B_1 a &= A_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1} - B_{n-2} a &= A_{n-1}, \\ R - B_{n-1} a &= A_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_1 &= B_0 a + A_1, \\ B_2 &= B_1 a + A_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-1} &= B_{n-2} a + A_{n-1}, \\ R &= B_{n-1} a + A_n. \end{aligned}$$

30. Имеем

$$\frac{f(x)}{x-1} = n^2 x^{n+1} - (n^2 + 2n - 1) x^n + 2x^{n-1} + 2x^{n-2} + \ldots + 2x + 1,$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2} = n^2 x^n - (2n-1) x^{n-1} - (2n-3) x^{n-2} - (2n-5) x^{n-3} - \ldots$$

$$\ldots - 3x - 1,$$

$$\frac{f(x)}{(x-1)^3} = n^2 x^{n-1} + (n-1)^2 x^{n-2} + (n-2)^2 x^{n-3} + \ldots + 9x^2 + 4x + 1,$$

т. е. $f(x)$ делится на $(x-1)^3$.

31. Имеем

$$A = nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1 = nx^n (x-1) - (x^n - 1) =$$
$$= (x-1)[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)].$$

Первый сомножитель $x-1$ делится на $x-1$; второй сомножитель $nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$ также делится на $x-1$, так как при $x=1$ он обращается в нуль. Следовательно, A делится на $(x-1)^2$.

32. Пусть

$$f(x, y) = (x-y) Q(x, y), \tag{1}$$

где $Q(x, y)$ — некоторый многочлен.

Равенство (1) есть тождество, т. е. оно имеет место при любых значениях x и y.

В силу симметричности $f(x, y)$ относительно x и y в равенстве (1) можно x и y поменять местами. Следовательно,

$$f(x, y) = (y-x) Q(y, x). \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$(x-y) Q(x, y) = (y-x) Q(y, x).$$

Поделив обе части этого равенства на $(x-y)$, получаем

$$Q(x, y) = -Q(y, x). \tag{3}$$

При $x=y$ имеем

$$Q(y, y) = -Q(y, y), \text{ или } Q(y, y) = 0.$$

Это показывает, что многочлен $Q(x, y)$ обращается в нуль при замене x на y, следовательно, он делится на $x-y$, т. е.

$$Q(x, y) = (x-y)\, Q_1(x, y).$$

В силу последнего равенства и равенства (2) получаем

$$f(x, y) = (x-y)^2\, Q_1(x, y),$$

что и требовалось доказать.

33. Первое решение. При обычном делении многочлена x^5+ax^2+bx+c на $(x+1)^3$ получаем остаток

$$R = (a-10)\, x^2 + (b-15)\, x + (c-6).$$

Поэтому деление без остатка имеет место только при $a=10$, $b=15$ и $c=6$.

Второе решение. Пусть

$$(x^3+3x^2+3x+1)(x^2+px+q) = x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+ax^2+bx+c.$$

Тогда

$$x^5+(p+3)\, x^4+(q+3p+3)\, x^3+(3q+3p+1)\, x^2+(3q+p)\, x+q = \\ = x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+ax^2+bx+c.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$p+3=0 \text{ и } q+3p+3=0,$$

откуда $p=-3$, $q=6$.

Далее,

$$a = 3q+3p+1 = -9+18+1 = 10,$$
$$b = 3q+p = 18-3 = 15,$$
$$c = q = 6.$$

34. Имеем

$$2S_m = [1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n+m^n] + \\ +[m^n+(m-1)^n+\ldots+3^n+2^n+1^n] = [1^n+m^n]+[2^n+(m-1)^n]+ \\ +\ldots+[k^n+(m-k+1)^n]+\ldots+[m^n+1^n].$$

Каждая из сумм $[k^n+(m-k+1)^n]$ как сумма одинаковых нечетных степеней делится соответственно на сумму $k+(m-k+1)$, где $k=1, 2, \ldots, m$, но $k+(m-k+1)=m+1$ для всех k.

Итак, $2S_m$ кратно $m+1$, а следовательно, $2S_{m-1}$ кратно m. Далее,

$$2S_m = 2[1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n]+2m^n = 2S_{m-1}+2m^n.$$

Так как, по доказанному, $2S_{m-1}$ кратно m, то и $(2S_{m-1}+2m^n)$ кратно m.

Таким образом, $2S_m$ кратно двум взаимно простым числам $(m+1)$ и m, а потому $2S_m$ кратно их произведению $m(m+1)$, т. е.

$$2S_m = m(m+1)p,$$

где p — целое, откуда

$$S_m = \frac{m(m+1)}{2}p = (1+2+3+\ldots+m)p.$$

Отсюда следует, что $S_m = 1^n+2^n+3^n+\ldots+(m-1)^n+m^n$ делится на $1+2+3+\ldots+(m-1)+m$.

35. Имеем

$$f(1) = (1-2)^{2m}+(1-1)^m-1 = 1+0-1 = 0,$$
$$f(2) = (2-2)^{2m}+(2-1)^m-1 = 0+1-1 = 0.$$

Следовательно, многочлен $f(x)$ делится на $(x-1)$ и на $(x-2)$, а потому $f(x)$ делится и на произведение $(x-1)(x-2)$.

Теперь найдем частное от деления $f(x)$ на $(x-2)$:

$$\frac{(x-2)^{2m}+(x-1)^m-1}{x-2} = (x-2)^{2m-1}+\frac{(x-1)^m-1}{x-2}.$$

Известно, что

$$\frac{(x-1)^m-1}{x-2} = \frac{(x-1)^m-1}{(x-1)-1} = (x-1)^{m-1}+(x-1)^{m-2}+(x-1)^{m-3}+\ldots$$
$$\ldots+(x-1)+1.$$

Итак, частное от деления $f(x)$ на $(x-2)$ равно

$$(x-2)^{2m-1}+(x-1)^{m-1}+(x-1)^{m-2}+(x-1)^{m-3}+\ldots+(x-1)+1.$$

Далее, разделив это частное на $x-1$, получим

$$\frac{(x-2)^{2m-1}+1}{x-1}+(x-1)^{m-2}+(x-1)^{m-3}+(x-1)^{m-4}+\ldots$$
$$\ldots+(x-1)+1. \quad (1)$$

Но

$$\frac{(x-2)^{2m-1}+1}{x-1} = \frac{(x-2)^{2m-1}+1}{(x-2)+1} =$$
$$= (x-2)^{2m-2}-(x-2)^{2m-3}+(x-2)^{2m-4}-\ldots-(x-2)+1.$$

Следовательно, частное (1) принимает вид

$$[(x-2)^{2m-2}-(x-2)^{2m-3}+(x-2)^{2m-4}-\ldots-(x-2)+1]+$$
$$+[(x-1)^{m-2}+(x-1)^{m-3}+(x-1)^{m-4}+\ldots+(x-1)+1].$$

36. Имеем

$$(a+1)^{2n+1}+a^{n+2} = (a+1)^{2n+1}+a^{n+2}+a^{2(2n+1)}-$$
$$-a^{2(2n+1)} = [(a+1)^{2n+1}+a^{2(2n+1)}]-[a^{2(2n+1)}-a^{n+2}] =$$
$$= [(a+1)^{2n+1}+(a^2)^{2n+1}]-a^{n+2}[(a^3)^n-1].$$

Так как $2n+1$ — число нечетное, то выражение $[(a+1)^{2n+1}+(a^2)^{2n+1}]$ делится на $(a+1)+a^2=a^2+a+1$; число $(a^3)^n-1$ делится на $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$, т. е. и на число a^2+a+1.

Значит, заданное число кратно a^2+a+1.

37. Имеем

$$S=\frac{a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{a^nb-a^nc+b^nc-ab^n+c^n(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{ab(a^{n-1}-b^{n-1})-c(a^n-b^n)+c^n(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{ab(a^{n-2}+a^{n-3}b+\ldots+b^{n-2})-c(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})+c^n}{(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}-a^{n-1}c-a^{n-2}bc-\ldots-ab^{n-2}c}{(a-c)(b-c)}-$$

$$-\frac{b^{n-1}c+c^n}{(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{a^{n-1}(b-c)+a^{n-2}b(b-c)+\ldots+ab^{n-2}(b-c)-c(b^{n-1}-c^{n-1})}{(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}-c(b^{n-2}+b^{n-3}c+\ldots+c^{n-2})}{a-c}=$$

$$=\frac{ab^{n-2}+a^2b^{n-3}+\ldots+a^{n-2}b+a^{n-1}-b^{n-2}c-b^{n-3}c^2-\ldots-bc^{n-2}}{a-c}-$$

$$-\frac{c^{n-1}}{a-c}=$$

$$=\frac{b^{n-2}(a-c)+b^{n-3}(a^2-c^2)+\ldots+b(a^{n-2}-c^{n-2})+(a^{n-1}-c^{n-1})}{a-c}=$$

$$=b^{n-2}+b^{n-3}(a+c)+b^{n-4}(a^2+ac+c^2)+\ldots$$

$$\ldots+b(a^{n-3}+a^{n-4}c+\ldots+c^{n-3})+(a^{n-2}+a^{n-3}c+\ldots+c^{n-2}).$$

38. Очевидно, что A есть сумма членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, и знаменатель x^2, а B есть сумма членов геометрической прогрессии, первый член которой также равен 1 и знаменатель x.

Имеем

$$A=\frac{1-x^{2n}\cdot x^2}{1-x^2}=\frac{1-(x^{n+1})^2}{1-x^2},$$

$$B=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

$$\frac{A}{B}=\frac{1-(x^{n+1})^2}{1-x^2}:\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1+x^{n+1}}{1+x}.$$

Деление выполняется только, когда $(n+1)$ — нечетное число, т. е. при n четном.

Отв. n — любое четное.

39. Пусть $f(x)$ искомый многочлен. Согласно условию задачи

$$f(x)(x^2-1)=ax^{n+p}+bx^n, \tag{1}$$

где n — целое неотрицательное, p — целое положительное число и a, b — постоянные коэффициенты.

Равенство (1) перепишем так:

$$f(x)(x-1)(x+1)=x^n(ax^p+b).$$

Полагая в этом тождестве $x=1$, а затем $x=-1$, находим, что

$$\begin{cases} a+b=0, \\ a(-1)^p+b=0. \end{cases} \tag{2}$$

Если p нечетное, то из системы (2) следует

$$\begin{cases} a+b=0, \\ b-a=0, \end{cases}$$

откуда $a=b=0$, т. е. $f(x)=0:(x^2-1)$ и многочлен $f(x)$ есть нуль. Этот результат не дает решения вопроса, так как произведение $0\cdot(x^2-1)$ дает только один член (нуль).

Следовательно, надо положить, что $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $p=2m$ — четное число. В этом случае (2) дает только одну зависимость $a+b=0$, т. е

$$a=-b.$$

Поэтому

$$f(x)(x^2-1)=ax^n(x^{2m}-1),$$

откуда

$$f(x)=ax^n\cdot\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}=ax^n(x^{2m-2}+x^{2m-4}+\ldots+x^4+x^2+1),$$

или

$$f(x)=ax^{2m+n-2}+ax^{2m+n-4}+\ldots+ax^{n+4}+ax^{n+2}+ax^n,$$

где a — любое число, отличное от нуля, n — любое целое положительное число или нуль, m — любое целое положительное число.

40. Обозначим данное число через A; число, выраженное тремя последними его цифрами, через N, а число, выраженное всеми остальными его цифрами, через M.

Таким образом,

$$A=M\cdot 1000+N.$$

Число $1000+1$ делится и на 7, и на 11, и на 13. Заметив это, преобразуем полученную сумму так:

$$A=M\cdot 1001-(M-N), \quad \text{если} \quad M>N,$$

$$A=M\cdot 1001-(N-M), \quad \text{если} \quad M<N.$$

Поскольку $M \cdot 1001$ всегда делится на 7, на 11, на 13, то для того, чтобы число A делилось на 7, или на 11, или на 13, необходимо и достаточно, чтобы разность $M-N$ или $N-M$ делилась соответственно на 7, или на 11, или на 13, что и требовалось доказать.

41. Пусть a и b—рассматриваемые числа, d—их общий наибольший делитель. Тогда наименьшее кратное m этих чисел равно $\frac{ab}{d}$, а потому

$$1+4rq=1+4(ab-d)\frac{ab}{d^2}=1-4\cdot\frac{ab}{d}+4\left(\frac{ab}{d}\right)^2=$$

$$=(1-4m+4m^2)=(2m-1)^2.$$

42. Обозначая наименьшие по абсолютной величине положительные или отрицательные остатки от деления чисел a и b на 7 соответственно через x и y, имеем

$$a=7m+x, \quad b=7n+y,$$

где m и n—целые числа.

Следовательно,

$$a^2+b^2=(7m+x)^2+(7n+y)^2=7(7m^2+7n^2+2mx+2ny)+x^2+y^2,$$

откуда видно, что a^2+b^2 делится или не делится на 7, смотря по тому, делится или не делится на 7 число x^2+y^2. Но так как каждое из чисел x^2 и y^2 может иметь лишь одно из значений: 0^2, $(\pm 1)^2$, $(\pm 2)^2$, $(\pm 3)^2$, то x^2+y^2 может принимать лишь ограниченное число значений, а именно, x^2+y^2 равно одному из чисел:

$$0^2+0^2=0, \quad 1^2+1^2=2, \quad 2^2+2^2=8, \quad 3^2+3^2=18,$$
$$0^2+1^2=1, \quad 0^2+2^2=4, \quad 0^2+3^2=9,$$
$$1^2+2^2=5, \quad 1^2+3^2=10,$$
$$2^2+3^2=13.$$

Из всех этих чисел только первое (нуль) кратно 7, а потому a^2+b^2 кратно 7 лишь при $x=y=0$, т. е. когда каждое из чисел a и b делится на 7.

43. Имеем

$$\frac{mn+pq}{m-p}=n+\frac{p(q+n)}{m-p}, \qquad (1)$$

т. е. $p(q+n)$ делится на $m-p$. Но так как

$$\frac{mq+np}{m-p}=q+\frac{p(q+n)}{m-p},$$

то в силу (1) $mq+np$ делится на $m-p$.

44. Данное выражение можно представить так:

$$(n+1)^p(n-1)^{2p+1}.$$

Очевидно, что $(n+1)^p-1$ кратно n, т. е.

$$(n+1)^p-1=an,$$

где a—целое число.

Отсюда

$$(n+1)^p=an+1.$$

Аналогично $(n-1)^{2p+1}=bn-1$, где b—целое число.

Итак, имеем

$$(n+1)^p(n-1)^{2p+1}=(an+1)(bn-1)=abn^2+bn-an-1.$$

Отсюда видно, что если к данному выражению прибавить $nk+1$, где k—любое целое число, то оно будет делиться на n.

Отв. $nk+1$, где k—любое целое.

45. Имеем

$$7(6x+11y)-11(x+7y)=31x.$$

Так как $7(6x+11y)$ и $31x$ делятся на 31, то и $x+7y$ делится на 31.

46. Первое решение. Наименьшее число, делящееся без остатка на 2, 3, 4, 5 и 6, есть 60; следовательно, общий вид числа, дающего при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 остаток единицу, есть $60x+1$. С другой стороны, это число имеет вид $7y$.

Итак, имеем

$$60x+1=7y.$$

Подбором убеждаемся, что $x=5, y=43$, а искомое число есть 301.

Второе решение. Имеем

$$60x+1=7y,$$

откуда

$$y=\frac{60x+1}{7}=8x+\frac{4x+1}{7},$$

где $\frac{4x+1}{7}=z$—целое число.

Следовательно,

$$x=\frac{7z-1}{4}=2z-\frac{z+1}{4},$$

где $\frac{z+1}{4}$ должно быть целым числом.

Очевидно, что при $z=3$ справедливо

$$\frac{z+1}{4}=1, \text{ а } x=2\cdot 3-1=5.$$

Итак, $x=5$.

Искомое число

$$60x+1=60\cdot 5+1=301.$$

Отв. 301.

47. Пусть цифра десятков x, а цифра единиц y, тогда искомое число $10x+y$.

Согласно условию задачи имеем

$$10x+y=y\cdot y+x,$$

откуда

$$x=\frac{y(y-1)}{9}.$$

Так как x целое, то $\frac{(y-1)y}{9}$ должно быть также целым, а поскольку $y\leqslant 9$, то $y-1<9$ и, следовательно, $y=9$ и $x=8$.

Отв. 89.

48. Общий вид любого нечетного числа $(4n\pm 1)$.

Имеем $(4n\pm 1)^2=16n^2\pm 8n+1=8n(2n\pm 1)+1$. Из правой части этого равенства видно, что при делении $(4n\pm 1)^2$ на 8 получается остаток 1.

49. Если рассматривать $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ как целую рациональную функцию от аргумента x, то, убедившись в том, что это выражение обращается в нуль при $x=-y$ и при $x=-z$, мы приходим к выводу, что это выражение делится на $x-(-y)$ и на $x-(-z)$, т. е. оно делится на $x+y$ и на $x+z$.

Если же данное выражение рассматривать как целую рациональную функцию от аргумента y, то, заметив, что оно обращается в нуль при $y=-z$, мы приходим к выводу, что оно делится на $y-(-z)$, т. е. на $(y+z)$.

Итак, выражение $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ делится на произведение $(x+y)(x+z)(y+z)$.

Следовательно, имеем тождество

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=(x+y)(x+z)(y+z)M, \qquad (1)$$

где M — выражение, зависящее от x, y и z.

Левая часть равенства (1) есть однородный многочлен пятой степени, симметричный относительно x, y, z.

Но так как произведение $(x+y)(x+z)(y+z)$ есть однородный многочлен третьей степени, симметричный относительно x, y, z, то многочлен M должен быть однородным многочленом второй степени, симметричным относительно x, y, z, т. е. M должен иметь вид

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+xz+yz).$$

Итак, тождество (1) принимает вид

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=(x+y)(x+z)(y+z)[A(x^2+y^2+z^2)+ \\ +B(xy+xz+yz)]. \qquad (2)$$

Так как равенство (2) есть тождество, то оно должно иметь место при любых значениях x, y, z.

Пусть $x=y=z=1$, тогда из (2) имеем $240=8(3A+3B)$, откуда

$$A+B=10. \qquad (3)$$

Теперь пусть $x=y=1$ и $z=0$, тогда из (2) следует, что $30=2(2A+B)$, откуда

$$2A+B=15. \tag{4}$$

Решая уравнения (3) и (4) совместно, находим $A=5$ и $B=5$.

Подставляя в (2) значения A и B, получаем

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=$$
$$=5(x+y)(x+z)(y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz).$$

50. При $a=1$ дробь принимает значение $\frac{3}{5}$ — несократимая.

Пусть $a\neq 1$. Если сократима данная дробь, то и дробь $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$ также должна быть сократимой.

Имеем

$$\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}=\frac{a^4+2a^2+a^2+1}{a^3+2a}=a+\frac{a^2+1}{a^3+2a}.$$

Теперь остается доказать, что несократима и дробь $\frac{a^2+1}{a^3+2a}$, а следовательно, и

$$\frac{a^3+2a}{a^2+1}=\frac{a^3+a+a}{a^2+1}=a+\frac{a}{a^2+1}.$$

Наконец, надо доказать, что несократима дробь $\frac{a}{a^2+1}$, а следовательно, и дробь $\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$.

Но так как $a\neq 1$, то $\frac{a^2+1}{a}$ несократима, значит, и дробь $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ несократима.

51. Имеем

$$(m-n)(m^2-mn+n^2)(m^3+2m^2n+2mn^2+n^3)=$$
$$=(m-n)(m^3-mn+n^2)(m+n)(m^2-mn+n^2+2mn)=$$
$$=(m-n)(m+n)(m^2+n^2-mn)(m^2+n^2+mn)=$$
$$=(m^2-n^2)(m^4+n^4+m^2n^2)=$$
$$=(m^2-n^2)[(m^2-n^2)^2+3m^2n^2]. \tag{1}$$

Так как числа m и n не кратны 3, то разность $(m^2-1)-(n^2-1)=m^2-n^2$ кратна трем, следовательно, кратна трем и сумма $(m^2-n^2)^2+3m^2n^2$.

Итак, оба сомножителя (1) кратны трем, следовательно, произведение (1) кратно девяти.

52. Если искомое число оканчивается нулем, то оно делится на 2, а потому сумма его цифр должна быть равна 2, так что само число равно 20.

Пусть теперь обе цифры числа отличны от нуля. Если обозначить цифру десятков через x, а сумму цифр через z, то искомое число примет вид $10x+z-x$, или $9x+z$. По условию искомое число делится на z; следовательно, частное $\frac{9x+z}{z}=\frac{9x}{z}+1$ должно быть целым числом, а потому $9x$ должно делиться на z. Каждое из чисел x и z отлично от нуля и x меньше z, так как цифра единиц $(z-x)$ искомого числа отлична от нуля. Поэтому если бы x и z имели общий делитель d, больший единицы, то d было бы не больше x и, следовательно, меньше z; но тогда искомое число $(9x+z)$ также делилось бы на число d, большее единицы, но меньшее z, что противоречит условию. Следовательно, x и z — числа взаимно простые, а поскольку $9x$ делится на z, то и 9 делится на z. По условию z больше единицы, значит, оно равно или 3, или 9. Но если бы z равнялось 9, то искомое число, делясь на 9, делилось бы и на 3 и z не было бы наименьшим делителем искомого числа, отличным от единицы.

Итак, $z=3$. Ясно, что имеются лишь два двузначных числа с обеими значащими цифрами, сумма цифр которых равна 3, а именно 12 и 21. Но 12 делится на 2, меньшее трех, и только 21 имеет наименьший (отличный от единицы) делитель 3, равный сумме цифр этого числа.

Итак, числа 20 и 21 дают все решения задачи.

53. Покажем, что одно из чисел $A+B$ или $A-B$ не кратно p.

Действительно, если бы оба эти числа были кратны p, то каждое из чисел $(A+B)+(A-B)=2A$ и $(A+B)-(A-B)=2B$ было бы кратно p. А так как p по условию взаимно простое с 2, то одно из чисел $A+B$ и $A-B$, например $A+B$, взаимно простое с p, а потому и с p^n. Поскольку произведение $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ по условию делится на p^n и $A+B$ взаимно простое с p^n, то $A-B$ делится на p^n. Наоборот, если $A-B$ взаимно простое с p, то $A+B$ делится на p^n.

54. Напишем по формуле Ньютона разложение двучлена $(m+1)^p$, где m — целое, а p — простое число:

$$(m+1)^p=m^p+pm^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}m^{p-2}+\ldots+pm+1.$$

Известно, что все коэффициенты бинома Ньютона, т. е. числа вида $\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$ — числа целые. Все они, кроме первого и последнего, делятся на p. Действительно, мы уже знаем, что в дроби $\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$ числа, стоящие в знаменателе, должны полностью сократиться с множителями числителя. Но p взаимно просто со всеми числами 1, 2, 3, ..., k. Значит, эти числа должны полностью сократиться с множителями произведения $(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$, а множитель p останется нетронутым.

Итак, $(m+1)^p=m^p+$(число, делящееся на p)$+1$ или

$$(m+1)^p-(m+1)=(m^p-m)+ap.$$

Это равенство показывает следующее: если при каком-нибудь значении m двучлен (m^p-m) делится на p, то на p разделится и $(m+1)^p-(m+1)$, т. е. такой же двучлен, но с основанием, на единицу большим (потому что из делимости на некоторое число вычитаемого и разности следует делимость на это число и уменьшаемого). Если $m=1$, то $m^p-m=1-1=0$ наверное делится на p (нуль делится без остатка на любое число).

Итак, согласно принципу математической индукции m^p-m при любом m и простом p делится на p, что и требовалось доказать.

Замечание. $m^p-m=m(m^{p-1}-1)$. Если m кратно p, то теорема очевидна. Следовательно, важен и интересен только тот случай, когда m не делится на p. Но в таком случае m и p взаимно просты, потому что только те числа могут иметь общие множители с простым числом p, которые ему кратны. В случае взаимно простых m и p разность $m^{p-1}-1$ должна делиться на p. Так и была сформулирована теорема самим Ферма:

Если p просто, а m не делится на p, то $m^{p-1}-1$ делится на p.

55. Имеем

$$7^{100}+11^{100}=7^4[(7^{12})^8-1]+11^4[(11^{12})^8-1]+7^4+11^4.$$

По «малой» теореме Ферма $7^{12}-1$ и $11^{12}-1$ делятся на 13. Следовательно, остаток от деления $7^{100}+11^{100}$ на 13 равен остатку от деления 7^4+11^4 на 13. Последний же равен 12.

Отв. 12.

56. Число a, будучи взаимно простым с 35, не делится ни на 5, ни на 7. Поскольку a не кратно 5, то число $a^4-1=a^{5-1}-1$ делится, согласно «малой» теореме Ферма, на 5, а потому и все рассматриваемое число кратно 5. Представляя рассматриваемое число в виде

$$(a^2+1)[(a^2-1)(a^4+a^2+1+14a^2]=$$
$$=14a^2(a^4-1)+(a^2+1)(a^2-1)(a^4+a^2+1).$$

Выражение $14a^2(a^4-1)$ кратно 7.

Докажем, что $(a^2-1)(a^4+a^2+1)$ также кратно 7. Имеем

$$(a^2-1)(a^4+a^2+1)=a^6-1=a^{7-1}-1,$$

где a не кратно 7; следовательно, по «малой» теореме Ферма a^6-1 кратно 7.

Итак, рассматриваемое число кратно 7.

Так как заданное число делится на 5 и на 7, то оно делится на 35.

57. Искомое простое число не может равняться 5. Действительно, $5^{a^2}+1$, где a — любое целое число, при делении на 5 дает остаток 1, а потому при $a=5$ число $5^{a^2}+1$ не делится на 5, а следовательно, не делится и на a^2. Итак, искомое число a взаимно простое с числом 5.

Представим $5^{a^2}+1$ в виде

$$5^{a^2}+1=5^{a^2}-5+6=5(5^{a^2-1}-1)+6=5[(5^{a-1})^{a+1}-1^{a+1}]+6. \quad (1)$$

Число $(5^{a-1})^{a+1}-1^{a+1}$ кратно $5^{a-1}-1$, которое по «малой» теореме Ферма кратно a (так как по доказанному выше 5 есть число взаимно простое с a). Но по условию $5^{a^2}+1$ кратно a^2, а потому кратно a. Значит, кратно a и число 6 (см. (1)).

Отсюда приходим к выводу, что a как простое число должно быть равно либо 2, либо 3. Но $5^{2^2}+1=626$ не делится на $2^2=4$, а $5^{3^2}+1=1953126$ делится на $3^2=9$.

Итак, искомое простое число a равно 3.

Отв. 3.

Глава II

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В АЛГЕБРЕ

58. Так как $a+b+c=0$, то $a+b=-c$ и $(a+b)^3=-c^3$, или $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$, откуда

$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc.$$

59. Имеем

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+$$
$$+b^2c^2(b+c)=a^5+b^5+c^5-abc(ab+ac+bc).$$

В задаче 58 мы установили, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Учитывая, что

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \text{ и } a+b+c=0,$$

получаем

$$ab+ac+bc=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Итак,

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)=a^5+b^5+c^5+\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

откуда

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

60. Доказывается аналогично предыдущей задаче.

61. Умножив обе части равенства на 2, перенесем его правую часть влево. После простых преобразований получаем

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^2-2ab+b^2+a^2-$$
$$-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Так как a, b, c вещественны, то это возможно только тогда, когда $a=b=c$.

62. Имеем

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}.$$

Возведя обе части этого равенства в куб, получаем

$$a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b=-c,$$

откуда

$$a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=3\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{c}=3\sqrt[3]{abc},$$

или

$$(a+b+c)^3=\left(3\sqrt[3]{abc}\right)^3=27abc.$$

63. Первое решение. Имеем

$$y(x^2-yz)(1-xz)=x(1-yz)(y^2-xz).$$

Произведем последовательно тождественные преобразования:

$$yx^2-y^2z-yx^3z+xy^2z^2=xy^2+x^2z^2y-x^2z-xy^3z,$$

$$(yx^2-xy^2)-(x^2z^2y-xy^2z^2)-(yx^3z-xy^3z)+(x^2z-y^2z)=0,$$

$$xy(x-y)-xyz^2(x-y)-xyz(x+y)(x-y)+z(x+y)(x-y)=0.$$

Так как $x-y\neq 0$, то

$$xy-xyz^2-xyz(x+y)+z(x+y)=0,$$

или

$$xyz(x+y+z)=xy+xz+yz.$$

Разделив обе части этого равенства на произведение xyz, получим

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Второе решение. Перепишем данную пропорцию в виде

$$\frac{x^2-yz}{x-xyz}=\frac{y^2-xz}{y-xyz}. \qquad (1)$$

Так как $x\neq 0$ и $y\neq 0$, то, умножив числитель и знаменатель левой части равенства (1) на y, а числитель и знаменатель правой части (1) на x, получим

$$\frac{x^2y-y^2z}{xy-xy^2z}=\frac{xy^2-x^2z}{xy-x^2yz}. \qquad (2)$$

Составим производную пропорцию так: разность предыдущих членов в пропорции (1) относится к разности последующих членов этой пропорции как разность предыдущих членов в пропорции (2) относится к разности последующих членов этой пропорции:

$$\frac{x^2-y^2+z(x-y)}{x-y}=\frac{xy(x-y)+z(x^2-y^2)}{xyz(x-y)},$$

$$x+y+z=\frac{xy+xz+yz}{xyz},$$

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

64. Имеем

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Но так как по условию данной задачи $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то

$$ab+ac+bc=0. \tag{1}$$

Далее положим

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{k};$$

тогда $a=kx$, $b=ky$ и $c=kz$.

Подставив эти значения в (1), получим

$$k^2xy+k^2xz+k^2yz=0.$$

Поскольку $k^2\neq 0$, то

$$xy+xz+yz=0.$$

65. Имеем

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

т. е.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)=1,$$

откуда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-2\frac{xyc+xzb+yza}{abc}. \tag{1}$$

Из равенства $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ следует, что

$$xyc+xzb+yza=0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

что и требовалось доказать.

66. Поделив последовательно обе части равенства

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$$

на $(b-c)$, $(c-a)$ и $(a-b)$, получим три равенства:

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)(b-c)}+\frac{c}{(a-b)(b-c)}=0,$$

$$\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)(c-a)}=0,$$

$$\frac{a}{(b-c)(a-b)}+\frac{b}{(c-a)(a-b)}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)+$$
$$+\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)+\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=\frac{a}{(c-a)(a-b)}+\frac{b}{(b-c)(a-b)}+$$
$$+\frac{c}{(b-c)(c-a)}=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(c-a)(a-b)(b-c)}=$$
$$=\frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(c-a)(a-b)(b-c)}=0,$$

что и требовалось доказать.

67. Имеем

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{x+y+z}=\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{xyz(x+y+z)}=0, \qquad (1)$$

откуда

$$(x+y)(x+z)(y+z)=0. \qquad (2)$$

Аналогично, преобразуя доказываемое равенство, получаем

$$(x^n+y^n)(x^n+z^n)(y^n+z^n)=0. \qquad (3)$$

Таким образом, достаточно доказать, что при n нечетном из равенства (2) следует равенство (3).

Действительно, пусть $y+z=0$, тогда $z=-y$, поэтому $y^n+z^n=y^n-y^n=0$. Следовательно, неравенство (3) имеет место, а потому и доказываемое равенство также справедливо.

68. Так как $p\neq 0$, $q\neq 0$, то можно написать

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{p}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{b_2}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{b_n}{q}\right)^2=1,$$
$$\frac{a_1b_1}{pq}+\frac{a_2b_2}{pq}+\ldots+\frac{a_nb_n}{pq}=1.$$

Складывая первые два из этих равенств и вычитая удвоенное третье, находим

$$\left(\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}\right)^2=0.$$

Принимая во внимание вещественность всех величин, заключаем, что

$$\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}=0,\quad \frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}=0,\ \ldots,\ \frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}=0,$$

откуда вытекает утверждение задачи.

69. Легко убедиться, что

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right),$$

для этого достаточно показать, что сумма

$$\frac{1}{b-c}\left(\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)+\frac{1}{c-a}\left(\frac{a}{b-c}+\frac{c}{a-b}\right)+\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)$$

равна нулю.

Действительно, если привести члены этого выражения к общему знаменателю, получим

$$\frac{b(a-b)+c(c-a)+a(a-b)+c(b-c)+a(c-a)+b(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Раскрыв в числителе скобки, легко убедиться, что числитель равен нулю.

Итак, $B=CA$, где

$$C=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}.$$

Равенство $B=CA$ показывает, что если $A=0$, то и $B=0$.

Для того чтобы доказать обратное, т. е. что из $B=0$ следует $A=0$, необходимо доказать, что $C\neq 0$.

Легко представить C в таком виде:

$$C=-\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2(b-c)(c-a)(a-b)},$$

а так как a, b и c различны, то $C\neq 0$. Следовательно, обратное утверждение также верно.

70. Имеем

$$\left.\begin{aligned}\frac{m}{(a-b)^2}+\frac{n}{(a+c)^2}&=\lambda a,\\ \frac{n}{(b+c)^2}-\frac{l}{(a-b)^2}&=\lambda b,\\ \frac{l}{(a+c)^2}+\frac{m}{(b+c)^2}&=\lambda c,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

причем по предположению $\lambda\neq 0$. Умножая равенства (1) соответственно на l, m и $-n$ и складывая их почленно, получим

$$0=\lambda(al+bm-cn).$$

Но так как $\lambda\neq 0$, то должно быть

$$al+bm=cn.$$

Умножив теперь равенства (1) соответственно на

$$\frac{1}{(b+c)^2},\ -\frac{1}{(a+c)^2}\ \text{и}\ -\frac{1}{(a-b)^2}$$

и сложив полученные произведения, получим

$$0=\lambda\left[\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{b}{(a+c)^2}-\frac{c}{(a-b)^2}\right],$$

откуда

$$\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.$$

71. Имеем

$$A=\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right)-\left[(x^{2n}+x^{2n-2}+\ldots+x^4+x^2)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}\right)\right]=2+2+2+\ldots+2=2n.$$

Отв. $2n$.

72. Имеем

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{1}{n-2}\right)\left(1+\frac{1}{n-2}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\ldots$$

$$\ldots\frac{n-3}{n-2}\frac{n-1}{n-2}\frac{n-2}{n-1}\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Отв. $\dfrac{n+1}{2n}$.

73. Поскольку $4=\sqrt{4}+\sqrt{4}$, то

$$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})(1+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

Отв. $\sqrt{2}-1$.

74. Имеем

$$x+1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc},$$

$$y=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2},$$

$$y+1=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}+\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{4bc}{(b+c)^2-a^2}.$$

Итак,

$$(x+1)(y+1)=\frac{[(b+c)^2-a^2]}{2bc}\,\frac{4bc}{[(b+c)^2-a^2]}=2.$$

Ответ. 2.

75. Заметим, что $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ и $-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ являются корнями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Обозначим их через x_1 и x_2.

Имеем

$$A=\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)=1+\left(x_1^2+x_2^2\right)+(x_1x_2)^2=$$

$$=1+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(x_1x_2)^2=$$

$$=1+(-p)^2-2q+q^2=p^2+(1-q)^2.$$

Ответ. $p^2+(1-q)^2$.

76. На основании свойства ряда равных отношений имеем

$$A=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,x}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,y}.$$

Так как по условию $a_1+a_2+\ldots+a_n\neq 0$, то, сократив последнюю дробь на $a_1+a_2+\ldots+a_n$, получим

$$A=\frac{1+x}{1+y}.$$

77. Имеем

$$y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-1|+|x-3|.$$

Случай 1. Если $x\leqslant -2$, то $x+2\leqslant 0$, $x-1<0$ и $x-3<0$, следовательно, на основании определения модуля числа

$$y=(-x-2)+(-x+1)+(-x+3)=-3x+2.$$

Случай 2. Если $-2\leqslant x\leqslant 1$, то $x+2\geqslant 0$, $x-1\leqslant 0$ и $x-3<0$, следовательно,

$$y=(x+2)+(-x+1)+(-x+3)=-x+6.$$

Случай 3. Если $1 \leqslant x \leqslant 3$, то $x+2>0$, $x-1 \geqslant 0$, $x-3 \leqslant 0$, следовательно,

$$y=(x+2)+(x-1)+(-x+3)=x+4.$$

Случай 4. Если $x \geqslant 3$, то $x+2>0$, $x-1>0$, $x-3 \geqslant 0$, следовательно,

$$y=(x+2)+(x-1)+(x-3)=3x-2.$$

Отв. $-3x+2$ при $x \leqslant -2$,

$-x+6$ при $-2 \leqslant x \leqslant 1$,

$x+4$ при $1 \leqslant x \leqslant 3$,

$3x-2$ при $x \geqslant 3$.

78. Пусть $x=a$. Тогда исследуемое произведение равно

$$2a2a^2 2a^4 \ldots 2a^{2^{n-1}} = 2^n a^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} = 2^n a^{\frac{2^n-1}{2-1}} = 2^n a^{2^n-1}.$$

Пусть теперь $x \neq a$. Умножая и деля исследуемое произведение на $x-a$ и применяя последовательно формулу для разности квадратов двух чисел, получим

$$\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a} =$$

$$= \frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a} =$$

$$= \frac{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a} =$$

$$= \frac{(x^8-a^8)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a} = \frac{x^{2^n}-a^{2^n}}{x-a}.$$

Отв. $2^n a^{2^n-1}$ при $x=a$, $\dfrac{x^{2^n}-a^{2^n}}{x-a}$ при $x \neq a$.

79. Умножим и разделим данное выражение на x^2+ax+a^2 и воспользуемся тождеством

$$(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)=x^4+a^2x^2+a^4.$$

Применяя его последовательно, получим

$$\frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}.$$

80. Имеем

$$A=a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=$$
$$=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2).$$

81. Имеем

$$A=a^{5n}-a^{2n}+a^{2n}+a^n+1=$$
$$=a^{2n}(a^{3n}-1)+(a^{2n}+a^n+1)=$$
$$=a^{2n}(a^n-1)(a^{2n}+a^n+1)+(a^{2n}+a^n+1)=$$
$$=(a^{2n}+a^n+1)(a^{3n}-a^{2n}+1).$$

82. Имеем

$$A=(x^2+8x+15)(x^2+8x+7)+15=$$
$$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120=$$
$$=(x^2+8x+11)^2-1=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)=$$
$$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6).$$

83. Имеем

$$A=(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{a^2b^2}+(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4})\sqrt[3]{c^2}+$$
$$+(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2})\sqrt[3]{c^4}=$$
$$=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})\left[(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{c^4}\right]=$$
$$=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})\left[(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{c^2})\sqrt[3]{c^2}-(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{c^2})\sqrt[3]{b^2}\right]=$$
$$=(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{b^2})=$$
$$=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{c})\times$$
$$\times(\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{b}).$$

84. Имеем

$$ay^3-xy^3-ax^3+x^3y+a^3(x-y)=$$
$$=xy(x^2-y^2)-a(x^3-y^3)+a^3(x-y)=$$
$$=(x-y)[x^2(y-a)+xy(y-a)-a(y^2-a^2)]=$$
$$=(x-y)(y-a)(x^2+xy-ay-a^2)=$$
$$=(x-y)(x-a)(y-a)(a+x+y).$$

85. Первое решение. Должно быть

$$x^3+4x^2+6x+4=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D,$$

или

$$x^3+4x^2+6x+4=$$
$$=Ax^3+(3A+B)x^2+(3A+2B+C)x+(A+B+C+D).$$

Следовательно,

$$A=1,\ 3A+B=4,\ 3A+2B+C=6$$

и

$$A+B+C+D=4,$$

откуда получаем

$$A=B=C=D=1,$$

а значит,

$$x^3+4x^2+6x+4=(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1.$$

Второе решение. Имеем

$$x^3+4x^2+6x+4=(x^3+3x^2+3x+1)+$$
$$+(x^2+3x+3)=(x+1)^3+(x^2+2x+1)+(x+2)=$$
$$=(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1.$$

86. Обозначим $\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}}$ через p, а $\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}$ через q, тогда

$$x^3-3x-2\frac{A^2+B}{A^2-B}=(p+q)^3-3(p+q)-2\frac{A^2+B}{A^2-B}=$$
$$=p^3+q^3+3pq(p+q)-3(p+q)-2\frac{A^2+B}{A^2-B}.$$

Но

$$p^3+q^3=2\frac{A^2+B}{A^2-B},\ \text{а}\ pq=1.$$

Следовательно,

$$z=2\frac{A^2+B}{A^2-B}+3(p+q)-3(p+q)-2\frac{A^2+B}{A^2-B}=0.$$

Отв. 0.

87. Имеем

$$x^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}},\quad x^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{q-p}},$$

$$x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{q-p}}=$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{q-p}}\left[1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\right]=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{q-p}}\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$A=\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{q-p}}=$$
$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{q-p}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}.$$

88. Прежде всего замечаем, что

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=\sqrt[6]{(2+\sqrt{5})^3}\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt[6]{38+17\sqrt{5}}\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=\sqrt[6]{(17\sqrt{5})^2-38^2}=1.$$

Итак,

$$\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}}=1.$$

Следовательно,

$$A=\frac{1-mx}{1+mx}\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}. \qquad (1)$$

Вычислим $\frac{1-mx}{1+mx}$ при $x=\frac{1}{mn}\sqrt{(2m-n)n}$:

$$\frac{1-mx}{1+mx}=\frac{n-\sqrt{(2m-n)n}}{n+\sqrt{(2m-n)n}}=\frac{\sqrt{n^2}-\sqrt{(2m-n)n}}{\sqrt{n^2}+\sqrt{(2m-n)n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2m-n}}{\sqrt{n}+\sqrt{2m-n}}.$$

Далее вычислим $\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$ при том же значении x:

$$\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}=\sqrt{\frac{m+\sqrt{(2m-n)n}}{m-\sqrt{(2m-n)n}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2m-n+2\sqrt{(2m-n)n}+n}{2m-n-2\sqrt{(2m-n)n}+n}}=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{2m-n}+\sqrt{n}}{\sqrt{2m-n}-\sqrt{n}}\right|=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2m-n}}{\sqrt{n}-\sqrt{2m-n}},$$

так как $n>2m-n$.

Таким образом,

$$A=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{2m-n}}{\sqrt{n}+\sqrt{2m-n}}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2m-n}}{\sqrt{n}-\sqrt{2m-n}}=1.$$

Отв. 1.

89. Имеем

$$(a^m+a^n)^3=(a^p+a^q)^3,$$

или

$$a^{3m}+a^{3n}+3a^{m+n}(a^m+a^n)=a^{3p}+a^{3q}+3a^{p+q}(a^p+a^q).$$

Но так как $a^m+a^n=a^p+a^q$ и $a^{3m}+a^{3n}=a^{3p}+a^{3q}$, то $a^{m+n}=a^{p+q}$, откуда

$$m+n=p+q,$$

т. е.

$$m-p=q-n. \qquad (1)$$

Так как согласно условию

$$a^m - a^p = a^q - a^n,$$

то

$$a^p (a^{m-p} - 1) = a^n (a^{q-n} - 1). \qquad (2)$$

Возможны только два случая:

1) $m - p = 0$; тогда на основании (1) $q - n = 0$ и равенство (2) приводится к виду $0 = 0$. В этом случае $m = p$ и $n = q$, а следовательно, $mn = pq$.

2) $m - p \neq 0$, тогда $q - n \neq 0$ (так как $m - p = q - n$). Равенство (2) приводится к виду $a^p = a^n$, а поэтому $p = n$. Но тогда из (1) следует равенство $q = m$ и, значит,

$$mn = pq.$$

90. Первое решение. Вычтем почленно второе из заданных в условии равенств из первого, получим

$$a^3 - b^3 + p(a - b) = 0.$$

Так как $a \neq b$, то, поделив обе части этого равенства на $(a - b)$, получим

$$a^2 + ab + b^2 + p = 0.$$

Таким же образом, вычитая почленно третье равенство из первого, получаем

$$a^2 + ac + c^2 + p = 0.$$

И, наконец, вычитая почленно одно из другого последние два равенства, имеем

$$a(b - c) + b^2 - c^2 = 0,$$

или, сокращая на $b - c$, не равное 0, получаем

$$a + b + c = 0.$$

Второе решение. Из заданных трех равенств усматриваем, что многочлен $x^3 + px + q$ обращается в нуль при $x = a$, при $x = b$ и при $x = c$. Следовательно, этот многочлен делится на произведение $(x - a)(x - b)(x - c)$.

Итак, имеем тождество

$$x^3 + px + q = (x - a)(x - b)(x - c),$$

так как коэффициент при x^3 равен единице.

Значит

$$x^3 + px + q = x^3 - (a + b + c)x^2 + (bc + ac + ab)x - abc.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получаем соответственно

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = p \quad \text{и} \quad abc = -q.$$

Третье решение. Из данных трех равенств следует, что a, b, c—корни уравнения

$$x^3+0x^2+px+q=0 \text{ (т. е. } x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c),$$

следовательно, $x_1+x_2+x_3=0$ или $a+b+c=0$.

91. Пусть α—общий корень заданных уравнений, тогда

$$\alpha^3+p\alpha+q=0 \tag{1}$$

и

$$\alpha^3+p_1\alpha+q_1=0. \tag{2}$$

Вычитая из (1) равенство (2), получим

$$(p-p_1)\,\alpha=q_1-q.$$

Если $p=p_1$, то и $q_1=q$, и тогда обе части доказываемого равенства равны нулю, т. е. утверждение задачи верно.

Если же $p\neq p_1$, то

$$\alpha=-\frac{q-q_1}{p-p_1}.$$

В силу (1) имеем

$$\left(\frac{q-q_1}{p-p_1}\right)^3+p\left(\frac{q-q_1}{p-p_1}\right)-q=0,$$

т. е.

$$(q-q_1)^3+p\,(p-p_1)^2\,(q-q_1)-q\,(p-p_1)^3=0,$$

откуда

$$(q-q_1)^3=(p-p_1)^2\,(pq_1-p_1q).$$

92. Первое решение. Пусть корни уравнения x_1 и x_2 По теореме Виета имеем

$$x_1+x_2=-\frac{n}{m}, \tag{1}$$

$$x_1x_2=\frac{n}{m}, \tag{2}$$

а по условию

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{p}{q}. \tag{3}$$

Из (3) получаем производную пропорцию

$$\frac{x_1+x_2}{x_2}=\frac{p+q}{q}. \tag{4}$$

В силу (1) и (4) имеем

$$\frac{p+q}{q}\,x_2=-\frac{n}{m},$$

откуда

$$x_2 = -\frac{n}{m}\frac{q}{p+q},$$

или

$$x_2^2 = \frac{n^2}{m^2}\frac{q^2}{(p+q)^2}. \qquad (5)$$

Разделив (2) на (3), получим

$$x_2^2 = \frac{n}{m}\frac{q}{p}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$\frac{n^2}{m^2}\frac{q^2}{(p+q)^2} = \frac{n}{m}\frac{q}{p},$$

т. е.

$$\frac{n}{m} = \frac{q}{p}\frac{(p+q)^2}{q^2}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_2\sqrt{\frac{n}{m}} = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\frac{p+q}{q} = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\left(\frac{p}{q}+1\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}}\right).$$

В правой части последнего равенства выбираем знак минус, т. е. берем $\varepsilon = \varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$ (или $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$).

Итак,

$$\varepsilon_2\sqrt{\frac{n}{m}} + \varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}} + \varepsilon_1\sqrt{\frac{q}{p}} = 0.$$

Второе решение. Имеем

$$\left(\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 =$$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + 2 = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} + 2 =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} - 2 + 2 = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}.$$

По формулам Виета имеем

$$x_1 + x_2 = -\frac{n}{m}, \quad x_1x_2 = \frac{n}{m}.$$

Таким образом,

$$\left(\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2=\frac{\left(-\frac{n}{m}\right)^2}{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}=\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^2,$$

откуда

$$\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{q}{p}}=-\varepsilon_2\sqrt{\frac{n}{m}},$$

где $\varepsilon=\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1$.

Итак,

$$\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}+\varepsilon_1\sqrt{\frac{q}{p}}+\varepsilon_2\sqrt{\frac{n}{m}}=0.$$

Глава III

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

93. Уравнение $[f(x)]^2=[\varphi(x)]^2$ равносильно уравнению $[f(x)]^2-[\varphi(x)]^2=0$, или

$$[f(x)-\varphi(x)]\,[f(x)+\varphi(x)]=0. \qquad (1)$$

Но уравнение (1) удовлетворяется тогда и только тогда, когда $f(x)=\varphi(x)$ или $f(x)=-\varphi(x)$, что и требовалось доказать.

94. Дискриминант первого уравнения $D=p^2-q$, а дискриминант второго $D_1=p_1^2-q_1$. Пусть для определенности будут мнимыми корни первого уравнения, т. е. $D<0$.

Имеем

$$D+D_1=p^2+p_1^2-(q+q_1).$$

Так как по условию $q+q_1=2pp_1$, то

$$D+D_1=p^2+p_1^2-2pp_1=(p-p_1)^2\geqslant 0.$$

Таким образом, сумма дискриминантов неотрицательна. Следовательно, хотя бы один из них неотрицателен. Поскольку $D<0$, то $D_1>0$, т. е. уравнение $x^2+2p_1x+q_1=0$ имеет вещественные корни.

95. Очевидно, что $x=y=0$ является решением.

Требуется доказать, что для того, чтобы других действительных решений не было, необходимо, чтобы $b^2-4ac<0$.

Решим данное уравнение $ax^2+bxy+cy^2=0$ относительно x:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}y.$$

Отсюда видно, что

1) при $y=0$ имеем $x=0$;

2) при $y=y_0$ (где y_0 — действительное, отличное от нуля число) x не может принимать действительных значений в том и только в том случае, когда $b^2-4ac<0$.

Таким образом, при $b^2-4ac<0$ уравнение имеет единственное решение $x=y=0$.

96. Пусть уравнение имеет вид $P(x)=0$. Поделим левую часть уравнения на произведение

$$[(x-a)-b\sqrt{c}\,][(x-a)+b\sqrt{c}\,]=(x-a)^2-b^2c.$$

Обозначим частное через $Q(x)$, а остаток через $Ax+B$, где A и B — рациональные числа.

Итак, имеем

$$P(x)=Q(x)[(x-a)^2-b^2c]+Ax+B. \qquad (1)$$

Поскольку $x=a+b\sqrt{c}$ есть корень многочлена $P(x)$, то, подставив в (1) вместо x число $a+b\sqrt{c}$, получим

$$0=Q(a+b\sqrt{c})\cdot 0+A(a+b\sqrt{c})+B,$$

или

$$Aa+B+Ab\sqrt{c}=0. \qquad (2)$$

Так как левая часть последнего равенства есть сумма рационального числа $Aa+B$ и иррационального числа $Ab\sqrt{c}$, то равенство (2) возможно только при

$$Ab\sqrt{c}=0 \quad \text{и} \quad Aa+B=0.$$

По условию $b\neq 0$ и $c\neq 0$, поэтому $A=B=0$.

Далее, положив в равенстве (1) $x=a-b\sqrt{c}$, получим

$$P(a-b\sqrt{c})=0,$$

т. е. $x=a-b\sqrt{c}$ является корнем уравнения $P(x)=0$, что и требовалось доказать.

97. Пусть целое число α является корнем уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n — целые числа.

Тогда имеем

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0,$$

или

$$\alpha\left(a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\right)=-a_n,$$

откуда

$$a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\ldots+a_{n-1}=-\frac{a_n}{\alpha}.$$

Так как левая часть последнего равенства — целое число, то правая часть $\left(-\frac{a_n}{\alpha}\right)$ тоже должна быть целым числом, т. е. целое число α является делителем a_n, что и требовалось доказать.

98. Предположим, что корнем данного уравнения является рациональная несократимая дробь $\frac{a}{b}$; тогда имеем

$$\frac{a^2}{b^2}+p\frac{a}{b}+q=0,$$

откуда

$$\frac{a^2}{b}+ap+bq=0,$$

или

$$\frac{a^2}{b}=-(ap+bq).$$

Так как $\frac{a}{b}$ несократимая, то $\frac{a^2}{b}$ тоже является несократимой дробью. Правая же часть — целое.

Итак, получилось, что несократимая дробь равна целому числу, что невозможно.

Следовательно, наше предположение, что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет дробный рациональный корень, отпадает, и так как по условию это уравнение имеет рациональные корни, то они могут быть только целыми.

99. Согласно условию задачи

$$a=2p+1, \quad b=2n+1, \quad c=2q+1.$$

Дискриминант квадратного уравнения

$$D=(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)=8\left[\frac{n(n+1)}{2}-\right.$$

$$\left.-2pq-p-q-1\right]+5. \qquad (1)$$

Выражение в квадратных скобках есть целое число, так как произведение $n(n+1)$ кратно двум. Очевидно, что D — нечетное число, как сумма четного и нечетного чисел.

Если предположить, что корни данного квадратного уравнения рациональны, то необходимо, чтобы его дискриминант был полным квадратом.

Выше мы установили, что дискриминант (1) есть нечетное число, следовательно, он может быть квадратом только нечетного числа.

Из (1) усматриваем, что при делении дискриминанта на 8 получается остаток 5.

Докажем, что при делении квадрата нечетного числа на 8 всегда получается остаток 1, а не 5. Этим самым мы докажем, что наше предположение о том, что корни рациональны, отпадает.

Действительно, мы знаем, что любое нечетное число можно представить в виде $4m \pm 1$. Найдем квадрат этого числа

$$(4m \pm 1)^2 = 16m^2 \pm 8m + 1 = 8(2m^2 \pm m) + 1.$$

Итак, утверждение задачи верно.

100. Имеем

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) = \\ = a_0x^n - a_0(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} + \\ + a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - \\ - a_0(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + \ldots \\ \ldots + (-1)^n a_0x_1x_2x_3 \ldots x_n. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим требуемые формулы.

101. Пусть третий корень данного уравнения γ.

Согласно формулам Виета

$$\alpha + \beta + \gamma = 0;$$

отсюда

$$\gamma = -(\alpha + \beta). \tag{1}$$

Но так как по условию

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0,$$

то

$$\gamma = -(\alpha + \beta) = \alpha\beta.$$

По формулам Виета также

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p, \tag{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = -q. \tag{3}$$

Воспользуемся теперь условием $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$ и равенствами (1), (2), (3). Исключив из этих четырех равенств α, β и γ, получим

$$(p - q)^2 + q = 0.$$

Отв. Третий корень $\gamma = \alpha\beta$, а зависимость между p и q такова: $(p - q)^2 = -q$.

102. Перепишем данное уравнение так:

$$\frac{4x^4+50x^2+20x^3}{(5+2x)^2}-\frac{74}{49}=0,$$

или

$$\left(\frac{2x^2}{5+2x}\right)^2+5\left(\frac{2x^2}{5+2x}\right)-\frac{74}{49}=0.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{2x^2}{5+2x}$, получаем

$$\frac{2x^2}{5+2x}=-\frac{37}{7}, \qquad \frac{2x^2}{5+2x}=\frac{2}{7}.$$

Наконец, решая эти квадратные уравнения, находим

$$x_{1,2}=\frac{\pm i\sqrt{1221}-37}{14}, \quad x_3=1, \quad x_4=-\frac{5}{7}.$$

103. Так как

$$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1),$$

то данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$x+1=0, \quad \text{откуда} \quad x_1=-1, \tag{1}$$

и

$$x^4-x^3+x^2-x+1=0. \tag{2}$$

Разделив все члены уравнения (2) на x^2 и сгруппировав члены, равноотстоящие от конца и начала, получим

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0. \tag{3}$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=z$, тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$ и уравнение (3) принимает вид

$$z^2-z-1=0.$$

Корни этого уравнения

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Итак, имеем

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

откуда

$$x_{2,3}=\frac{1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad x_{4,5}=\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Отв. $x_1=-1,\quad x_{2,3}=\frac{1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad x_{4,5}=$

$$=\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

104. Преобразуем левую часть уравнения так:

$$x^4-8x+63=x^4+16x^2+64-16x^2-8x-1=$$
$$=(x^2+8)^2-(16x^2+8x+1)=(x^2+8)^2-(4x+1)^2=$$
$$=(x^2+4x+9)(x^2-4x+7).$$

Имеем

$$(x^2+4x+9)(x^2-4x+7)=0.$$

Отв. $x_{1,2}=-2\pm i\sqrt{5}$ и $x_{3,4}=2\pm i\sqrt{3}$.

105. Имеем

$$16x^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1,$$

т. е.

$$16x^4=(x+1)^4.$$

Отв. $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{3},\ x_{3,4}=\frac{-1\pm 2i}{5}$.

106. Перепишем уравнение так:

$$8x^4+8x^3+2x^2-2x^2-x-190=0,$$

или

$$2x^2(4x^2+4x+1)-x(2x+1)-190=0,$$

или

$$2[x(2x+1)]^2-[x(2x+1)]-190=0.$$

Итак, имеем квадратное уравнение относительно $x(2x+1)$.

Отв. $x_1=2,\quad x_2=-2{,}5,\quad x_{3,4}=\frac{-1\pm 5i\sqrt{3}}{4}$.

107. Умножив обе части данного уравнения на 16, получим

$$16(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=72,$$

или

$$(8x+7)^2(8x+6)(8x+8)=72,$$

или

$$(8x+7)^2(8x+7+1)(8x+7-1)=72.$$

Обозначив $8x+7$ через y, получим

$$y^2(y^2-1)=72,$$

откуда

$$y_{1,2}=\pm 3, \quad y_{3,4}=\pm 2i\sqrt{2}.$$

Итак, имеем четыре уравнения

$$8x+7=\pm 3 \quad \text{и} \quad 8x+7=\pm 2i\sqrt{2}.$$

Ответ. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{5}{4}$, $x_{3,4}=\frac{-7\pm 2i\sqrt{2}}{8}$.

108. Первое решение. Имеем

$$x^4-2x^2a+a^2-6x^2+4x+2a=0,$$

или

$$a^2-2(x^2-1)a-6x^2+4x+x^4=0.$$

Решая это уравнение относительно a, получаем

$$a_{1,2}=x^2-1\pm\sqrt{x^4-2x^2+1+6x^2-4x-x^4}=$$

$$=x^2-1\pm\sqrt{4x^2-4x+1}=x^2-1\pm\sqrt{(2x-1)^2}=$$

$$=x^2-1\pm(2x-1).$$

Итак, имеем два квадратных уравнения относительно x:

$$x^2+2x-2-a=0 \quad \text{и} \quad x^2-2x-a=0.$$

Из первого уравнения находим

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{a+3},$$

а из второго

$$x_{3,4}=1\pm\sqrt{a+1}.$$

Очевидно, что если $a\geqslant -1$, то все четыре корня действительные, если же $a<-3$, то все четыре корня мнимые, а если $-3\leqslant a<-1$, то первые два корня действительные, а два последних мнимые.

Второе решение. Имеем

$$(x^2-a)^2-4x^2-2x^2+4x+2a=0,$$

или

$$(x^2-2x-a)(x^2+2x-a)-2(x^2-2x-a)=0,$$

или

$$(x^2-2x-a)(x^2+2x-a-2)=0.$$

Это уравнение равносильно двум уравнениям:

$$x^2-2x-a=0 \quad \text{и} \quad x^2+2x-a-2=0.$$

Дальше как в первом решении.

Отв. $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{a+3}$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{a+1}$.

109. Прибавив к обеим частям уравнения по $2x\left(\frac{x}{x-1}\right)$, получим

$$x^2+2x\left(\frac{x}{x-1}\right)+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8+2x\left(\frac{x}{x-1}\right),$$

или

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2=8+2\frac{x^2}{x-1},$$

или

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}-8=0.$$

Обозначив $\frac{x^2}{x-1}$ через y, получаем

$$y^2-2y-8=0,$$

откуда

$$y_1=4, \quad y_2=-2.$$

Далее,

$$\frac{x^2}{x-1}=4 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{x-1}=-2.$$

Из первого уравнения находим $x_{1,2}=2$, а из второго $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

Отв. $x_{1,2}=2$, $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

110. Имеем

$$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=1,$$

или

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=1.$$

Обозначим x^2+5x+5 через y, получим

$$(y-1)(y+1)=1,$$

или

$$y^2=2,$$

откуда

$$y_1=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad y_2=-\sqrt{2}.$$

Таким образом, имеем два квадратных уравнения:

$$x^2+5x+5=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x^2+5x+5=-\sqrt{2}.$$

Отв. $x_{1,2,3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{5\pm4\sqrt{2}}}{2}$.

111. После подстановки $x-5=y$ и раскрытия скобок получим

$$y^6+3y^5+3y^4+4y^3+3y^2+3y+1=0.$$

Итак, имеем возвратное уравнение. Представим его в виде

$$\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+3\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+3\left(y+\frac{1}{y}\right)+4=0. \qquad (1)$$

Далее, делаем подстановку $y+\frac{1}{y}=z$; отсюда

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2,$$

$$y^3+\frac{1}{y^3}=z^3-3z.$$

Таким образом, уравнение (1) принимает вид

$$z^3+3z^2-2=0.$$

Очевидно, один из корней этого уравнения $z_1=-1$. Остается решить уравнение

$$z^2+2z-2=0,$$

откуда

$$z_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}.$$

Значит,

$$y+\frac{1}{y}=-1,\quad y+\frac{1}{y}=-1+\sqrt{3},\quad y+\frac{1}{y}=-1-\sqrt{3}.$$

Из этих трех уравнений получаем 6 значений для y:

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad y_{3,4}=\frac{-1+\sqrt{3}\pm i\sqrt[4]{12}}{2},$$

$$y_{5,6}=\frac{-1-\sqrt{3}\pm\sqrt[4]{12}}{2}.$$

Но так как $x=y+5$, то легко найти корни заданного уравнения.

Отв. $x_{1,2}=\frac{9\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{9+\sqrt{3}\pm i\sqrt[4]{12}}{2}$, $x_{5,6}=\frac{9-\sqrt{3}\pm\sqrt[4]{12}}{2}$.

112. При $x=0$ левая часть уравнения превращается в нуль. Следовательно, $x \neq 0$. Разделим числители и знаменатели каждого из дробных членов левой части уравнения на x

$$\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Пусть

$$4x+\frac{7}{x}=y. \tag{1}$$

Тогда имеем

$$\frac{4}{y-8}+\frac{3}{y-10}=1,$$

откуда

$$y_1=16, \quad y_2=9. \tag{2}$$

Из (1) и (2) легко найти корни заданного уравнения.

Отв. $x_1=\frac{7}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=\frac{9 \pm i\sqrt{31}}{8}$.

113. Имеем

$$\sqrt[4]{x+1}\,(x+1)=x\sqrt[4]{243x},$$

или

$$(x+1)^5=(3x)^5,$$

или

$$\left(\frac{x+1}{3x}\right)^5=1.$$

Известно, что корень пятой степени из единицы имеет лишь одно действительное значение, равное единице, поэтому

$$\frac{x+1}{3x}=1.$$

Отв. $x=\frac{1}{2}$.

114. Должно быть

$$3x-5 \geqslant 0, \quad 2x \geqslant 0, \quad 3-\sqrt{2x} \geqslant 0,$$

или

$$x \geqslant \frac{5}{3}, \quad x \geqslant 0, \quad x \leqslant \frac{9}{2}.$$

Из этих неравенств следует, что $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}$.

Очевидно, что в этом соотношении должны быть отброшены знаки равенства.

Итак,

$$\frac{5}{3}<x<\frac{9}{2}. \tag{1}$$

Решая, как обычно, данное уравнение находим

$$x_1=2, \quad x_2=98.$$

Учитывая (1), заключаем, что лишь $x=2$ может быть решением уравнения. Проверкой убеждаемся, что $x=2$ удовлетворяет исходному уравнению.

Отв. 2.

115. Обозначив $\sqrt{x}$ через y, получим

$$y^2+1-2y(3y^2-2)=0. \qquad (1)$$

Преобразуем последовательно левую часть уравнения (1):

$$y^2-2y+1-6y^3+4y+2y=0,$$
$$(y-1)^2-(y-1)(6y^2+6y)=0,$$
$$(y-1)(y-1-6y^2-6y)=0,$$
$$(y-1)\,6\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Отсюда

$$y_1=1, \quad y_2=-\frac{1}{3}, \quad y_3=-\frac{1}{2}.$$

Но так как по условию $\sqrt{x}=y\geqslant 0$, то y может быть равен только 1, а следовательно, $x=y^2=1$.

Отв. $x=1$.

116. Первое решение. Обозначим $\sqrt{x+1}$ через y, тогда имеем $x=y^2-1$ и

$$(y^2-1)^2-4(y^2-1)y+8(y^2-1)-8y+8=0,$$

или

$$y^4-4y^3+6y^2-4y+1=0,$$

т. е.

$$(y-1)^4=0,$$

откуда

$$y=1.$$

Итак, $x=0$ есть единственный корень данного уравнения.

Второе решение. Имеем

$$x^2-4x\sqrt{x+1}+4(x+1)+4x-8\sqrt{x+1}+4=0,$$
$$(x-2\sqrt{x+1})^2+4(x-2\sqrt{x+1})+4=0,$$
$$(x-2\sqrt{x+1}+2)^2=0,$$
$$(x+1-2\sqrt{x+1}+1)^2=0,$$
$$(\sqrt{x+1}-1)^4=0,$$

откуда

$$\sqrt{x+1}=1.$$

Отв. $x=0$.

117. Преобразуем данное уравнение к такому виду:

$$\left[\left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4=1.$$

Пусть

$$\sqrt{x}-\frac{5}{2}=y. \tag{1}$$

Имеем

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4=1.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$2y^4+3y^2-\frac{7}{8}=0. \tag{2}$$

Решаем уравнение (2):

$$y^2=\frac{-3\pm 4}{4}, \quad y^2=\frac{1}{4},$$

$$y=\pm\frac{1}{2} \tag{3}$$

$\left(y^2=-\frac{7}{4}\right.$ отбрасываем, так как в этом случае корни будут мнимые$\left.\right)$.

Из (1) и (3) следует:

1) $\sqrt{x}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{x}=3$, $x_1=9$,

2) $\sqrt{x}-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$, $\sqrt{x}=2$, $x_2=4$.

Отв. $x_1=9$, $x_2=4$.

118. Обозначим $\sqrt[5]{1+2x}$ через u, а $\sqrt[5]{1-2x}$ через v. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u+v=\sqrt[5]{2}, \\ u^5+v^5=2. \end{cases}$$

Поделив второе уравнение системы на первое и перенеся $\sqrt[5]{16}$ в левую часть, получим

$$u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4-\sqrt[5]{16}=0. \tag{1}$$

Уравнение (1) равносильно следующим уравнениям:

$$(u+v)^4-5u^3v-5u^2v^2-5uv^3-\sqrt[5]{16}=0,$$

$$(u+v)^4-5uv(u^2+v^2+uv)-\sqrt[5]{16}=0,$$

$$(u+v)^4-5uv(u+v)^2+5u^2v^2-\sqrt[5]{16}=0.$$

Так как $u+v=\sqrt[5]{2}$, то последнее уравнение принимает вид

$$(\sqrt[5]{2})^4-5uv\sqrt[5]{4}+5u^2v^2-\sqrt[5]{16}=0,$$

или

$$-5uv\sqrt[5]{4}+5u^2v^2=0,$$

т. е.

$$uv(uv-\sqrt[5]{4})=0, \qquad (2)$$

откуда $u=0$, а следовательно,

$$x_1=-0{,}5;$$

$v=0$ и, значит, $x_2=0{,}5$.

Из (2) также получаем

$$uv=\sqrt[5]{4}. \qquad (3)$$

Решая (3) совместно с уравнением $u+v=\sqrt[5]{2}$, убеждаемся, что эта система имеет только мнимые корни. Согласно условию задачи мы их отбрасываем.

Отв. $x_1=-0{,}5$; $x_2=0{,}5$.

119. Запишем ряд уравнений, равносильных данному в условии:

$$\sqrt[5]{3+x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x},$$

$$\sqrt[5]{3+x}\cdot\frac{x+3}{3x}=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x},$$

$$\frac{(3+x)^{\frac{6}{5}}}{x^{\frac{6}{5}}}=64, \quad \left(\frac{3+x}{x}\right)^6=64^5, \quad \left(\frac{3+x}{x}\right)^6=32^6, \quad \frac{3+x}{x}=\pm 32.$$

Итак, имеем два уравнения:

$$\frac{3+x}{x}=32 \quad \text{и} \quad \frac{3+x}{x}=-32.$$

Отв. $x_1=\frac{3}{31}$, $x_2=-\frac{1}{11}$.

120. Если $x \leqslant 1$, то $|x-1|=1-x$, $|x-2|=2-x$ и данное уравнение приводится к такому:

$$1-x+2-x=1.$$

Из него находим $x=1$.

Если $1<x\leqslant 2$, то $|x-1|=x-1$ и $|x-2|=2-x$. Левая часть данного уравнения равна 1 при всяком x из рассматриваемого промежутка, а так как правая часть уравнения тоже равна 1, то при всяком x, удовлетворяющем соотношениям $1<x\leqslant 2$, уравнение удовлетворяется.

Наконец, если $x>2$, то $|x-1|=x-1$, $|x-2|=x-2$ и данное уравнение приводится к уравнению $x-1+x-2=1$, которое не имеет решений $x>2$.

Итак, уравнение удовлетворяется, если $1\leqslant x\leqslant 2$.

Отв. Любое значение x из сегмента [1, 2].

121. Введя обозначения

$$\sqrt[3]{8-x}=a \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{27+x}=b,$$

получим

$$a^2-ab+b^2=7, \quad a^3=8-x, \quad b^3=27+x.$$

Сложив последние два равенства, получим

$$a^3+b^3=35.$$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2=7, \\ a^3+b^3=35, \end{cases}$$

или равносильную ей систему

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2=7, \\ a+b=5. \end{cases}$$

Из этой системы имеем $a_1=2$ и $a_2=3$. Так как $8-x=a^3$, то имеем два уравнения:

$$8-x=8 \quad \text{и} \quad 8-x=27.$$

Отв. $x_1=0$, $x_2=-19$.

122. Представим данное уравнение так:

$$x^2-6x+9+x-4\sqrt{x}+4=0,$$

или

$$(x-3)^2+(\sqrt{x}-2)^2=0.$$

Так как $(x-3)^2$ и $(\sqrt{x}-2)^2$ — неотрицательные выражения, то их сумма равна нулю только тогда, когда каждое из них равно нулю, т. е.

$$(x-3)^2=0 \quad \text{и} \quad (\sqrt{x}-2)^2=0.$$

Но $(x-3)^2=0$ только при $x=3$, а $(\sqrt{x}-2)^2=0$ только при $x=4$, так что невозможно одновременное выполнение равенств

$$(x-3)^2=0 \quad \text{и} \quad (\sqrt{x}-2)^2=0$$

и заданное уравнение не имеет действительных корней.

Отв. Нет действительных корней.

123. Очевидно, что $x \neq 1$, а следовательно, $\sqrt[3]{(x-1)^2} \neq 0$. Поэтому можно разделить обе части уравнения на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$; получим уравнение

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-1=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}},$$

равносильное данному.

Преобразуем его:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-1=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Введя обозначение

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=y,$$

получим

$$y^2-1=y, \quad \text{или} \quad y^2-y-1=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

т. е.

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

или

$$\frac{x+1}{x-1}=\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Составляем производную пропорцию

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3+1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3-1},$$

откуда

$$x=\frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3+1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3-1}.$$

124. Первое решение. Введем такую подстановку $x=y+\sqrt{a}$. Имеем

$$(y+\sqrt{a})^4-6a(y+\sqrt{a})^2+8a\sqrt{a}(y+\sqrt{a})-3a^2=0,$$

или

$$(y^4+4y^3\sqrt{a}+6ay^2+4ay\sqrt{a}+a^2)+(-6ay^2-6a^2-12a\sqrt{ay})+$$

$$+(8a\sqrt{a}\,y+8a^2)-3a^2=0,$$

или

$$y^4+4y^3\sqrt{a}=0,$$

или

$$y^3(y+4\sqrt{a})=0,$$

откуда

$$y_1=y_2=y_3=0, \qquad y_4=-4\sqrt{a}.$$

Поэтому

$$x_1=x_2=x_3=\sqrt{a}, \qquad x_4=-3\sqrt{a}.$$

Второе решение. Пусть $\sqrt{a}=b$, тогда

$$x^4-6b^2x^2+8b^3x-3b^4=0. \tag{1}$$

Левая часть уравнения (1) представляет собой однородный многочлен, сумма коэффициентов которого равна нулю. Следовательно, один из корней этого многочлена равен b.

Итак, имеем

$$x^4-b^2x^2-5b^2x^2+5b^3x+3b^3x-3b^4=0,$$

$$x^2(x^2-b^2)-5b^2x(x-b)+3b^3(x-b)=0,$$

$$(x-b)(x^3+bx^2-5b^2x+3b^3)=0,$$

$$(x-b)^2(x^2+2bx-3b^2)=0,$$

откуда

$$(x-b)^2=0 \tag{1}$$

и

$$(x^2+2bx-3b^2)=0. \tag{2}$$

Из (1) следует $x_{1,2}=b$, а из (2) находим $x_3=b=\sqrt{a}$, $x_4=-3b=-3\sqrt{a}$.

Ответ. $x_1=x_2=x_3=\sqrt{a}$, $x_4=-3\sqrt{a}$.

125. Преобразуем данное уравнение к такому виду:

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}}\left(2c-\sqrt[2pq]{x^{q-p}}-\sqrt[2pq]{x^{p-q}}\right)=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}}=0, \quad \text{откуда} \quad x_1=0, \tag{1}$$

и

$$2c-\sqrt[2pq]{x^{q-p}}-\sqrt[2pq]{x^{p-q}}=0. \tag{2}$$

Обозначим $\sqrt[2pq]{x^{q-p}}$ через y, тогда уравнение (2) примет вид

$$2c-y-\frac{1}{y}=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=c\pm\sqrt{c^2-1}.$$

Таким образом,

$$\sqrt[2pq]{x^{q-p}}=c\pm\sqrt{c^2-1},$$

откуда

$$x_{2,3}=\sqrt[q-p]{(c\pm\sqrt{c^2-1})^{2pq}}.$$

Отв. $x_1=0$, $x_{2,3}=\sqrt[q-p]{(c\pm\sqrt{c^2-1})^{2pq}}$.

126. Обозначим $\sqrt[3]{x}$ через y. Имеем

$$2y^4-4y^3+y^2+y-6=0,$$

или

$$2y^4-4y^3+y^2-2y+3y-6=0,$$

или

$$2y^3(y-2)+y(y-2)+3(y-2)=0,$$

или

$$(y-2)(2y^3+y+3)=0. \qquad (1)$$

Так как в многочлене $2y^3+y+3$ сумма коэффициентов при нечетных степенях y равна сумме коэффициентов при четных степенях, то этот многочлен имеет корень, равный -1. Следовательно, уравнение (1) принимает вид

$$(y-2)(y+1)(2y^2-2y+3)=0. \qquad (2)$$

Так как корни уравнения $2y^2-2y+3=0$ мнимые, то из (2) находим только два действительных корня:

$$y_1=2, \quad y_2=-1.$$

Так как $x=y^3$, то $x_1=8$, $x_2=-1$.

Отв. $x_1=8$, $x_2=-1$.

127. Рассмотрим отдельно уравнение при $q\neq 0$ и при $q=0$.

Пусть $q\neq 0$, тогда и $x\neq 0$.

Поделив обе части уравнения на x^2, получим

$$\left(x+\frac{q}{x}-p\right)^2+\left(x+\frac{q}{x}+p\right)^2=1.$$

Пусть $x+\frac{q}{x}=y$, тогда имеем

$$(y-p)^2+(y+p)^2=1,$$

откуда

$$2y^2+2p^2=1$$

и

$$y=\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}}.$$

Итак, имеем уравнение

$$x+\frac{q}{x}=\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}},$$

или

$$x^2\pm x\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}}+q=0,$$

откуда:

$$x_{1,2,3,4}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}}\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}-4q}}{2}.$$

Если же $q=0$, то данное уравнение принимает вид

$$(x^2-px)^2+(x^2+px)^2=x^2,$$

или

$$2x^4+2p^2x^2-x^2=0,$$

или

$$x^2(2x^2+2p^2-1)=0,$$

откуда

а) $x^2=0$, $x_{1,2}=0$;

б) $2x^2+2p^2-1=0$, $x^2=\frac{1-2p^2}{2}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}}$.

Отв. Если $q\neq 0$, то

$$x_{1,2,3,4}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}}\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}-4q}}{2};$$

если $q=0$, то

$$x_{1,2}=0,\qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{1-2p^2}{2}}.$$

128. Имеем

$$(x^4+2ax^3+a^2x^2)-(x^3-a^2x)+(x^2-2ax+a^2)=0,$$
$$[x(x+a)]^2-(x-a)[x(x+a)]+(x-a)^2=0. \qquad (1)$$

Подстановкой убеждаемся, что $x\neq a$, т. е. $x-a\neq 0$. Разделив обе части уравнения (1) на $(x-a)^2$, получаем

$$\left[\frac{x(x+a)}{x-a}\right]^2-\left[\frac{x(x+a)}{x-a}\right]+1=0.$$

Пусть

$$\frac{x(x+a)}{x-a}=y,$$

тогда

$$y^2-y+1=0,$$

откуда

$$y=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

а следовательно,

$$\frac{x(x+a)}{x-a}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Отв. $x=\frac{\alpha-a\pm\sqrt{\alpha^2+a^2-6a\alpha}}{2}$, где $\alpha=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

129. Представим данное уравнение так:

$$[(x-2)^2+10(x-2)+5]\sqrt{x-2}=5(x-2)^2+10(x-2)+1.$$

Обозначим $\sqrt{x-2}$ через y, тогда будем иметь

$$(y^4+10y^2+5)y=5y^4+10y^2+1,$$

или

$$y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y-1=0,$$

или

$$(y-1)^5=0,$$

откуда $y=1$, т. е. $\sqrt{x-3}=0$.

Отв. $x=3$.

130. Представим данное уравнение так:

$$x^2-6x+9+y-4\sqrt{y}+4=0,$$

или

$$(x-3)^2+(\sqrt{y}-2)^2=0.$$

Так как

$$(x-3)^2\geqslant 0 \quad \text{и} \quad (\sqrt{y}-2)^2\geqslant 0,$$

то

$$(x-3)^2+(\sqrt{y}-2)^2=0$$

только тогда, когда

$$(x-3)^2=0 \quad \text{и} \quad (\sqrt{y}-2)^2=0,$$

откуда

$$x=3 \quad \text{и} \quad y=4.$$

Отв. $x=3$, $y=4$.

131. Введя обозначения $8-x=a^4$ и $89+x=b^4$, получим систему

$$\begin{cases} a+b=5, \\ a^4+b^4=97. \end{cases} \tag{1}$$

Имеем

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2.$$

Подставив вместо $a+b$ и a^4+b^4 их численные значения (см. систему (1)), получим

$$97=(25-2ab)^2-2a^2b^2,$$

или

$$2a^2b^2-100ab+528=0,$$

или

$$a^2b^2-50ab+264=0.$$

Решая последнее уравнение относительно ab, получаем

$$ab=6 \quad \text{и} \quad ab=44.$$

Итак, имеем две системы:

$$\begin{cases} a+b=5, \\ ab=6 \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\begin{cases} a+b=5, \\ ab=44. \end{cases} \tag{3}$$

Из системы (2) имеем

$$a_1=2, \quad b_1=3 \quad \text{и} \quad a_2=3, \quad b_2=2.$$

Система (3) не имеет действительных решений.
Поскольку $8-x=a^4$, то $x_1=-8$, $x_2=-73$.
Ответ. $x_1=-8$, $x_2=-73$.

132. Имеем

$$\left(\frac{x^2}{8a}+\frac{2x}{3}+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4},$$

откуда

$$\frac{x^4}{64a^2}+\frac{4x^2}{9}+\frac{a^2}{4}-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^2}{8}+\frac{2ax}{3}=0,$$

или

$$\left(\frac{x^2}{8a}-\frac{2x}{3}-\frac{a}{2}\right)^2=0.$$

Следовательно,

$$\frac{x^2}{8a}-\frac{2x}{3}-\frac{a}{2}=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$x_1=6a, \quad x_2=-\frac{2a}{3}.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ. $x_1=6a$, $x_2=-\frac{2a}{3}$.

133. Введем обозначение

$$x=y\sqrt{3}. \tag{1}$$

Имеем

$$3y^3\sqrt{3}+2y\sqrt{3}-5\sqrt{3}=0,$$

или

$$3y^3+2y-5=0,$$
$$3y^3-3y^2+3y^2-3y+5y-5=0,$$
$$3y^2(y-1)+3y(y-1)+5(y-1)=0,$$
$$(y-1)(3y^2+3y+5)=0,$$

откуда

$$y_1=1,\quad y_{2,3}=\frac{-3\pm i\sqrt{51}}{6}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) легко найти корни заданного уравнения.

Отв. $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\dfrac{-\sqrt{3}+i\sqrt{17}}{2}$, $x_3=\dfrac{-\sqrt{3}-i\sqrt{17}}{2}$.

134. Искомое уравнение должно иметь вид

$$ax^8+bx^4+c=0,$$

т. е. должно быть квадратным относительно $y=x^4$.

Итак, уравнение $ay^2+by+c=0$ имеет корень

$$y_1=(\sqrt{5}-\sqrt{3})^4=(8-2\sqrt{15})^2=124-32\sqrt{15}.$$

Так как по условию a, b, c рациональны, то

$$y_2=124+32\sqrt{15}.$$

На основании теоремы Виета имеем

$$y^2-248y+16=0.$$

Следовательно, искомое уравнение

$$x^8-248x^4+16=0.$$

135. Действительно, величина $3x^2+5x+1$ при всяком x больше, чем $3x^2+5x-8$. Поэтому

$$\sqrt{3x^2+5x+1}>\sqrt{3x^2+5x-8}.$$

Значит, левая часть данного уравнения при всяком x отрицательна и, следовательно, не может равняться единице, т. е. уравнение не имеет решений.

Отв. Нет решений.

136. Корни уравнения

$$x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-m^2+1}=m\pm 1.$$

По условию имеем

$$\begin{cases} -2<m+1<4, \\ -2<m-1<4, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} -3<m<3, \\ -1<m<5, \end{cases}$$

откуда $-1<m<3$.

Ответ. Корни заданного уравнения заключены между -2 и 4, если $-1<m<3$.

137. Имеем

$$\left(\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{12\sqrt{x-2}}{3}-24\right)+\left(\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\frac{2\sqrt{y-1}}{2}-4\right)=0,$$

или

$$12\left(\frac{3}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{3}-2\right)+2\left(\frac{2}{\sqrt{y-1}}+\frac{\sqrt{y-1}}{2}-2\right)=0,$$

или

$$12\frac{(3-\sqrt{x-2})^2}{3\sqrt{x-2}}+2\frac{(2-\sqrt{y-1})^2}{2\sqrt{y-1}}=0.$$

Очевидно, что левая часть уравнения может быть равна нулю только тогда, когда

$$3-\sqrt{x-2}=0 \quad \text{и} \quad 2-\sqrt{y-1}=0.$$

Ответ. $x=11$, $y=5$.

138. Обозначим катеты и гипотенузу треугольника соответственно через a, b, c.

По условию имеем

$$a+b+c=\frac{ab}{2}. \tag{1}$$

По теореме Пифагора

$$a^2+b^2=c^2. \tag{2}$$

Исключив из уравнений (1) и (2) c, получим

$$a=\frac{4b-8}{b-4}=4+\frac{8}{b-4}.$$

Так как a и b по условию должны быть целыми, то 8 должно делится на $b-4$, т. е. $b-4$ может быть равно 1, 2, 4 или 8, так что

$$b_1=5, \quad b_2=6, \quad b_3=8, \quad b_4=12.$$

Соответственно находим

$$a_1=12, \quad a_2=8, \quad a_3=6, \quad a_4=5$$

и

$$c_1=13, \quad c_2=10, \quad c_3=10, \quad c_4=13.$$

Ответ. 12, 5, 13; 8, 6, 10; 6, 8, 10; 5, 12, 13.

139. Перепишем данное уравнение так:

$$x\,[15x^2+2-4xy\,(x^2y-x+1)]=1.$$

Замечаем, что искомое число x является делителем 1. Следовательно, если уравнение имеет решения, то $x=\pm 1$.

Подставляя в данное уравнение $x=1$, получаем $y^2=4$, откуда

$$y_{1,2}=\pm 2.$$

Далее, подставляя в данное уравнение $x=-1$, получим

$$2y\,(y+2)=-9.$$

Последнее уравнение неразрешимо в целых числах, так как левая часть четна, а правая нечетна.

Итак, уравнение имеет два решения.

Отв. $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=1$, $y_2=-2$.

140. Искомые числа: n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$. По условию задачи

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}=1{,}45.$$

Наибольшее из обратных чисел $\frac{1}{n}$.

Ясно, что наибольшее из нескольких слагаемых чисел больше их среднего арифметического. В этой задаче

$$\frac{1}{n}>\frac{145}{100\cdot 5}=\frac{29}{100},$$

откуда

$$n<\frac{100}{29}=3\frac{13}{29}. \qquad (1)$$

Так как n—целое положительное, то из (1) следует, что $n=1$, 2 или 3.

Проверкой легко установить, что в условиях данной задачи n может быть равно только 2, а следовательно, искомые числа 2, 3, 4, 5, 6.

Отв. 2, 3, 4, 5, 6.

141. Имеем

$$(x^x-2x)+(y^y-y)=0,$$

или

$$x\,(x^{x-1}-2)+y\,(y^{y-1}-1)=0. \qquad (1)$$

Если $x>2$, то $x-1>0$ и $x-1>1$, а потому $x^{x-1}>2^{x-1}>2^1$, т. е. $x^{x-1}>2$; следовательно, при $x>2$ имеет место неравенство

$$x\,(x^{x-1}-2)>0. \qquad (2)$$

Если $y>1$, то $y-1>0$, а потому $y^{y-1}>1^{y-1}$, т. е. $y^{y-1}>1$; значит, при $y>1$ имеет место неравенство

$$y\,(y^{y-1}-1)>0. \qquad (3)$$

Складывая неравенства (2) и (3), заключаем, что при $x>2$ и $y>1$ левая часть уравнения (1) положительна и поэтому отлична от нуля.

Итак, при существовании целых положительных решений данного уравнения x должно равняться 1 или 2, а $y=1$. Подстановкой убеждаемся, что

$$x=2, \quad y=1$$

является единственным решением (в целых положительных числах) данного уравнения.

Отв. $x=2$, $y=1$.

142. Очевидно, что

$$x=1, \quad y=\pm 1 \quad \text{и} \quad x=3, \quad y=\pm 3.$$

Докажем, что данное уравнение не имеет решений, кроме найденных.

Действительно,

$$\left.\begin{array}{r} 1!+2!=3, \\ 1!+2!+3!+4!=33. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Так как $5!$, $6!$, ... оканчиваются нулем и учитывая (1), заключаем, что все суммы, кроме $1!+2!+3!$, оканчиваются цифрой 3. Поэтому они не могут быть квадратами, что и требовалось доказать.

Отв. 1, 1; 1, -1; 3, 3; 3, -3.

143. Правая часть данного уравнения при $z\geqslant 0$ является нечетным числом, оканчивающимся цифрой 9. Но левая часть уравнения при $x\geqslant 2$ и $y\geqslant 2$ есть четное число. Следовательно, никакими парами целых чисел, бóльшими или равными 2, уравнение удовлетворено быть не может. Остается рассмотреть случай, когда $x=1$ или $y=1$.

Пусть $x=1$, тогда левая часть уравнения при y, равном соответственно 1, 2, 3, 4, выразится соответственно числами 2, 3, 7, 25, а при $y\geqslant 5$ представляет целое число, оканчивающееся единицей; следовательно, число $x!+y!$ не оканчивается цифрой 9 и, значит, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

144. Представим данное уравнение в виде

$$10x^2+21y^5-30z^3=\frac{578}{y}=2\cdot\frac{289}{y}.$$

Если y четное, то правая часть уравнения нечетна, а левая часть четна. Если же y — нечетное число, то правая часть уравнения — четное число, а левая нечетна. Но так как четное число не может быть равно нечетному числу, то данное уравнение не имеет решений в целых числах.

145. При x целом и положительном имеем

$$1+2+3+\ldots+x=\frac{x(x+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Итак, имеем

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 \frac{2x+1}{3} = y^2.$$

Поскольку $\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2$ — число целое и притом полный квадрат, то $\frac{2x+1}{3}$ должно быть точным квадратом некоторого нечетного числа (так как само $2x+1$ — число нечетное).

Пусть

$$\frac{2x+1}{3} = (2n+1)^2,$$

откуда

$$x = 6n^2 + 6n + 1,$$

а следовательно,

$$y^2 = (6n^2+6n+1)^2 (3n^2+3n+1)^2 (2n+1)^2,$$

откуда

$$y = \pm (6n^2+6n+1)(3n^2+3n+1)(2n+1),$$

где n — любое целое число.

146. Очевидно, что x должен быть кратным пяти. Полагая $x = 5z$, получаем

$$5z^3 - 4 = 9y. \qquad (1)$$

Левая часть этого уравнения должна быть кратна девяти, и так как число z может быть представлено в одном из трех видов:

$$3t, \quad 3t+1, \quad 3t-1,$$

то подстановкой этих выражений в уравнение (1) убеждаемся, что число, кратное девяти, дает только тот случай, когда z может быть представлено в виде $3t-1$. В этом случае

$$x = 15t - 5, \quad y = \frac{5z^3-4}{9} = 15t^3 - 15t^2 + 5t - 1.$$

При любом целом t получаем соответственно целые решения данного уравнения.

147. Имеем

$$10x + y = x^2 + 2xy + y^2,$$

или

$$x^2 - 2(5-y)x - y + y^2 = 0,$$

откуда

$$x = 5 - y \pm \sqrt{25 - 9y}. \qquad (1)$$

Так как число x должно быть целым, то необходимо, чтобы разность $25 - 9y$ была полным квадратом; эта разность может быть полным квадратом только при $y = 0$ и $y = 1$.

Пусть $y=0$, тогда из (1) следует

$$x_1=10, \quad x_2=0.$$

Пусть теперь $y=1$, тогда из (1) следует

$$x_3=8, \quad x_4=0.$$

Итак, данное уравнение имеет четыре решения.
Отв. $x_1=10, \quad y_1=0; \quad x_2=0, \quad y_2=0;$

$x_3=8, \quad y_3=1; \quad x_4=0, \quad y_4=1.$

148. Решая данное уравнение относительно y, имеем

$$y=\frac{10x+1}{x-10},$$

или

$$y=10+\frac{101}{x-10}, \tag{1}$$

откуда следует, что $(x-10)$ есть делитель простого числа 101. Таким образом, должно быть

$$x-10=\pm 1 \quad \text{и} \quad x-10=\pm 101. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем четыре решения.
Отв. $x_1=11, \quad y_1=111; \quad x_2=9, \quad y_2=-91;$

$x_3=111, \quad y_3=11; \quad x_4=-91, \quad y_4=9.$

149. Из второго уравнения системы имеем

$$x=y+z-3. \tag{1}$$

Подставляя значение x в первое уравнение системы, получаем

$$yz-3y-3z+4=0.$$

Из этого уравнения находим

$$y=\frac{3z-4}{z-3}=\frac{3(z-3)+5}{z-3},$$

или

$$y=3+\frac{5}{z-3}. \tag{2}$$

Для того чтобы y и z, будучи целыми числами, удовлетворяли уравнению (2), необходимо и достаточно, чтобы разность $z-3$ равнялась делителям пяти, т. е. $z-3$ должно принимать значения ± 1 и ± 5, откуда

$$z_1=4, \quad z_2=-2, \quad z_3=8, \quad z_4=2.$$

Подставляя эти значения z в равенство (2), получим

$$y_1=8,\quad y_2=2,\quad y_3=4,\quad y_4=-2.$$

Подставляя соответственные значения y и z в (1), получим

$$x_1=9,\quad x_2=-3,\quad x_3=9,\quad x_4=-3.$$

Отв. 9, 8, 4; -3, 2, -2; 9, 4, 8; -3, -2, 2.

150. Из второго уравнения видно, что $y-1=\frac{1}{4}|x+1|\geqslant 0$. Поэтому $|y-1|=y-1$ и система запишется так:

$$\begin{cases} |x+1|+y-1=5, \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$$

Исключая $|x+1|$, получим

$$4y-4+y-1=5.$$

Отсюда $y=2$.

Подставив значение $y=2$ в первое уравнение, найдем

$$|x+1|=4.$$

Если $x+1>0$, то получим уравнение $x+1=4$ и из него найдем $x=3$.

Если $x+1<0$, то получим уравнение $-x-1=4$ и из него найдем $x=-5$.

Отв. $x_1=3$, $y_1=2$; $x_2=-5$, $y_2=2$.

151. Имеем

$$\frac{x^2+y\sqrt{xy}}{y^2+x\sqrt{xy}}=\frac{420}{280}=\frac{3}{2},$$

или

$$\frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})}{\sqrt{y}(y\sqrt{y}+x\sqrt{x})}=\frac{3}{2},$$

отсюда

$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{3}{2},\ \text{т. е.}\ x=\frac{9y}{4}.$$

Из системы уравнений $x=\frac{9y}{4}$, $y^2+x\sqrt{xy}=280$ получаем решение.

Отв. $x=18$, $y=8$.

152. Из первого уравнения находим $y=\frac{x-m}{1+mx}$, из второго $y=-\frac{2+x}{1+x}$; приравняв эти два выражения, получаем

$$\frac{x-m}{1+mx}=-\frac{2+x}{1+x},$$

откуда

$$(1+m)\,x^2+(2+m)\,x+(2-m)=0.$$

Это уравнение имеет действительные корни при условии

$$(2+m)^2-4\,(1+m)\,(2-m)\geqslant 0.$$

После упрощения левой части получим $5m^2-4\geqslant 0$, откуда $|\,m\,|\geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}$. При этом условии x имеет действительные значения, значит, действительные значения имеет и $y=-\frac{2+x}{1+x}$.

Отв. $|\,m\,|\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$, т. е. $m\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$ или $m\leqslant-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

153. Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим

$$(a-1)\,(x-1)=0,$$

откуда

$$a=1 \quad \text{или} \quad x=1.$$

Подставляя значение $x=1$ в первое из заданных уравнений, получим $a=-2$.

Итак, уравнения имеют по крайней мере один общий корень при $a=1$ и при $a=-2$.

154. Первое решение. Сложив все уравнения системы, получим:

$$(1+2+3+\ldots+n)\,(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$

или

$$\frac{n\,(n+1)}{2}\,(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$

откуда

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=\frac{2\,(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}{n\,(n+1)}. \qquad (1)$$

Теперь вычтем из второго уравнения системы первое, получим

$$(n-1)\,x_1-x_2-x_3-\ldots-x_n=a_2-a_1. \qquad (2)$$

Сложив почленно уравнения (1) и (2), получим

$$x_1=\frac{a_2-a_1}{n}+\frac{2\,(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}{n^2\,(n+1)}.$$

Таким же образом найдем x_2, x_3, ..., x_{n-1}:

$$x_2=\frac{a_3-a_2}{n}+\frac{2\,(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}{n^2\,(n+1)},$$

$$x_3=\frac{a_4-a_3}{n}+\frac{2\,(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}{n^2\,(n+1)},$$

. . . . . .

$$x_{n-1}=\frac{a_n-a_{n-1}}{n}+\frac{2\,(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}{n^2\,(n+1)}.$$

Для нахождения x_n вычтем из первого уравнения системы последнее и получившееся таким образом уравнение сложим с уравнением (1), получим

$$x_n = \frac{a_1 - a_n}{n} + \frac{2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)}{n^2(n+1)}.$$

Второе решение. Рассмотрим k-е и $(k+1)$-е уравнения данной системы:

$$(n-k+2)x_1 + (n-k+3)x_2 + \ldots + x_k + 2x_{k+1} + \ldots + \\ + (n-k+1)x_n = a_k,$$

$$(n-k+1)x_1 + (n-k+2)x_2 + \ldots + nx_k + x_{k+1} + 2x_{k+2} + \ldots + \\ + (n-k)x_n = a_{k+1}.$$

Вычитая из нижнего уравнения верхнее, получим

$$(n-1)x_k - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_{k+1} + \ldots + x_n) = a_{k+1} - a_k.$$

Сложив это уравнение с (1) из первого решения, получим

$$nx_k = a_{k+1} - a_k + \frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n(n+1)},$$

откуда

$$x_k = \frac{a_{k+1} - a_k}{n} + \frac{2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n^2(n+1)}.$$

По этой формуле находятся

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}.$$

Затем найдем x_n, как в первом решении.

155. Решая первые два уравнения данной системы относительно x и y, получаем

$$x = -\frac{(k+1)^2}{k^2+k-1}, \qquad y = \frac{k+1}{k^2+k-1}.$$

Подставив эти значения x и y в третье уравнение системы, получим

$$-\frac{(k+1)^3}{k^2+k-1} + \frac{(12-k)(k+1)}{k^2+k-1} = -(k+1).$$

Решаем это равенство относительно k.

Ответ. $k = -1$ и $k = 5$.

156. Перемножив первые два уравнения системы, получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

К такой же зависимости мы приходим при перемножении третьего и четвертого уравнений. Это показывает, что если имеют место любые три из данных уравнений, то имеет место и четвертое уравнение, т. е. система совместна.

Теперь приступим к решению системы.

Приравнивая правые части первого и третьего уравнений находим

$$\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

откуда

$$y=b\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}.$$

Далее, подставляя это значение в первые два уравнения, получим

$$x=a\frac{\lambda\mu+1}{\mu+\lambda}, \qquad z=c\frac{\lambda\mu-1}{\mu+\lambda}.$$

Отв. $x=a\dfrac{\lambda\mu+1}{\mu+\lambda}$, $y=b\dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}$, $z=c\dfrac{\lambda\mu-1}{\mu+\lambda}$.

157. Прибавим и вычтем в левой части первого уравнения величину $x(b+c)$, в левой части второго уравнения — величину $y(c+a)$ и, наконец, в левой части третьего уравнения — величину $z(b+a)$. Тогда после несложных преобразований данная система приведется к следующей равносильной системе:

$$\begin{cases} (b+c)(x+y+z)-x(a+b+c)=b-c, \\ (c+a)(x+y+z)-y(a+b+c)=c-a, \\ (a+b)(x+y+z)-z(a+b+c)=a-b. \end{cases} \qquad (1)$$

Сложив эти уравнения почленно, получим

$$2(a+b+c)(x+y+z)-(a+b+c)(x+y+z)=0,$$

или

$$(a+b+c)(x+y+z)=0.$$

Так как по условию $a+b+c\neq 0$, то

$$x+y+z=0,$$

и поэтому система (1) принимает вид

$$\begin{cases} -x(a+b+c)=b-c, \\ -y(a+b+c)=c-a, \\ -z(a+b+c)=a-b. \end{cases}$$

Отв. $x=\dfrac{c-b}{a+b+c}$, $y=\dfrac{a-c}{a+b+c}$, $z=\dfrac{b-a}{a+b+c}$.

158. Первое уравнение системы легко приводится к такому:

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-20=0.$$

При этом мы ввели под корень $x+y$, т. е. положили $x+y=\sqrt{(x+y)^2}$, и поэтому будем пока считать $x+y>0$.

Решая полученное уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x^2-y^2}$, получаем

$$\sqrt{x^2-y^2}=\frac{-1\pm 9}{2},\quad \sqrt{x^2-y^2}=4.$$

Равенство $\sqrt{x^2-y^2}=-5$ невозможно, так как $\sqrt{x^2-y^2}$ арифметический.

Итак, система привелась к следующей:

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ \sqrt{x^2-y^2}=4, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x^2-y^2=16, \end{cases}$$

откуда

$$x_1=5,\quad y_1=3;\quad x_2=5,\quad y_2=-3.$$

Значения

$$x_3=-5,\quad y_3=3;\quad x_4=-5,\quad y_4=-3$$

отбрасываем, так как в этом случае $x+y<0$.

Если же $x+y<0$, то $\sqrt{(x+y)^2}=-(x+y)$ и первое уравнение заданной в условии системы приводится к виду

$$x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}=20,$$

откуда $\sqrt{x^2-y^2}=5$.

Теперь заданная система имеет вид

$$\begin{cases} x^2-y^2=25, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$$

Решая ее, находим

$$x=\pm\sqrt{\frac{59}{2}},\quad y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Так как эти решения мы получили, считая, что $x+y<0$, то решением является только

$$x=-\sqrt{\frac{59}{2}},\quad y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Отв. $x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=5$, $y_2=-3$; $x_3=-\sqrt{\frac{59}{2}}$, $y_3=\frac{3}{\sqrt{2}}$; $x_4=-\sqrt{\frac{59}{2}}$, $y_4=-\frac{3}{\sqrt{2}}$.

159. Возводим первое уравнение заданной системы в квадрат

$$2x^2-2\sqrt{x^4-y^4}=y^2.$$

Подставляем сюда значение $x^4-y^4=144a^4$ из второго уравнения системы. Получаем

$$y^2=2x^2-24a^2. \qquad (1)$$

Отсюда находим y^4 и подставляем во второе уравнение системы. Получаем

$$x^4-32a^2x^2+240a^4=0.$$

Отсюда $x=\pm\sqrt{20}a$ и $x=\pm\sqrt{12}a$.

Из уравнения (1) находим y. Для каждого из значений $x=\pm\sqrt{20}a$ имеем $y=\pm 4a$, а для каждого из значений $x=\pm\sqrt{12}a$ имеем $y=0$.

Проверка показывает, что из полученных шести пар решений одни являются лишними при $a>0$, другие же являются лишними при $a<0$. Возьмем, например, решение $x=a\sqrt{20}$, $y=4a$. Подставляя его в первое уравнение, мы находим $\sqrt{36a^2}-\sqrt{4a^2}=4a$, т. е. $6|a|-2|a|=4a$. Это равенство является тождеством при $a\geqslant 0$, но оно не верно при $a<0$.

Отв. При $a\geqslant 0$ будут следующие решения:

$$x_1=\sqrt{20}a,\quad y_1=4a;\quad x_2=-\sqrt{20}a,\quad y_2=4a;$$
$$x_3=\sqrt{12}a,\quad y_3=0;\quad x_4=-\sqrt{12}a,\quad y_4=0.$$

При $a<0$ решения будут:

$$x_1=\sqrt{20}a,\ y_1=-4a;\ x_2=-\sqrt{20}a,\ y_2=-4a.$$

160. Обозначая $z=x-y$ и решая систему

$$\begin{cases} z=x-y, \\ x+y=a, \end{cases}$$

находим

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+z}{2}, \\ y=\dfrac{a-z}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Подставляя эти значения в первое уравнение заданной системы, получаем

$$(a+z)^4+(a-z)^4=16b^4,$$

или

$$z^4+6a^2z^2+(a^4-8b^4)=0.$$

Пусть $z^2=v$, тогда имеем

$$v^2+6a^2v+(a^4-8b^4)=0. \qquad (2)$$

Если свободный член этого уравнения $a^4-8b^4>0$, то заданная система действительных корней не имеет.

Если же $a^4-8b^4<0$, то уравнение (2) имеет один положительный корень

$$v_1=-3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}.$$

Следовательно,

$$z_1=\sqrt{v_1},\quad z_2=-\sqrt{v_1}.$$

Подставляя эти значения в уравнения (1), находим действительные решения системы.

Отв. $x_1=\dfrac{a+\sqrt{v_1}}{2}$, $y_1=\dfrac{a-\sqrt{v_1}}{2}$;

$$x_2=\frac{a-\sqrt{v_1}}{2},\quad y_2=\frac{a+\sqrt{v_1}}{2}.$$

161. Из второго и третьего уравнений находим

$$xz+xy+yz=\frac{13}{3},$$

или

$$x(y+z)+yz=\frac{13}{3}.$$

Но так как из условия имеем

$$y+z=\frac{13}{3}-x \quad \text{и} \quad yz=\frac{1}{x},$$

то

$$x\left(\frac{13}{3}-x\right)+\frac{1}{x}=\frac{13}{3},$$

т. е.

$$(x-1)\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)=0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=\dfrac{1}{3}$.

Поскольку все уравнения системы симметричны относительно x, y и z, то легко сразу написать все решения.

Отв. $x_1=1$, $y_1=3$, $z_1=\dfrac{1}{3}$; $\quad x_4=3$, $y_4=\dfrac{1}{3}$, $z_4=1$;

$x_2=1$, $y_2=\dfrac{1}{3}$, $z_2=3$; $\quad x_5=\dfrac{1}{3}$, $y_5=1$, $z_5=3$;

$x_3=3$, $y_3=1$, $z_3=\dfrac{1}{3}$; $\quad x_6=\dfrac{1}{3}$, $y_6=3$, $z_6=1$.

162. Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} x^m y^n = c a^m b^n, \\ x^n y^m = d a^m b^n. \end{cases}$$

Перемножаем эти уравнения и делим одно на другое. Получаем

$$(xy)^{m+n} = cda^{2m}b^{2n} \quad \text{и} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{m-n} = \frac{c}{d};$$

отсюда

$$xy = (cd)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}}$$

и

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Перемножая последние два уравнения, находим

$$x^2 = c^{\frac{2m}{m^2-n^2}} d^{\frac{2n}{n^2-m^2}} a^{\frac{2m}{m+n}} b^{\frac{2n}{m+n}}.$$

Выражение для y^2 можно найти аналогично, взяв уравнение

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{m-n} = \frac{d}{c}.$$

Оно отличается от соответствующего уравнения для x только перестановкой букв c и d.

Ответ. $x = c^{\frac{m}{m^2-n^2}} d^{\frac{n}{n^2-m^2}} b^{\frac{n}{m+n}} a^{\frac{m}{m+n}}$,

$y = c^{\frac{n}{n^2-m^2}} d^{\frac{m}{m^2-n^2}} a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}}$.

163. Обе части второго уравнения разделим на y ($y \neq 0$), получим уравнение, равносильное ему,

$$\frac{x^2}{8y^2} + \frac{2x}{3y} - \frac{1}{y}\sqrt{x^2\left(\frac{x}{3y} + \frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{2} = 0. \qquad (1)$$

Последовательно преобразуем левую часть уравнения (1):

$$\frac{x^2}{4y^2} - \frac{1}{y}\sqrt{x^2\left(\frac{4x}{3y}+1\right)} + \frac{4x}{3y} + 1 = 0,$$

$$\frac{|x|^2}{(2y)^2} - \frac{|x|}{y}\sqrt{\frac{4x}{3y}+1} + \frac{4x}{3y} + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{|x|}{2y}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4x}{3y}+1}\right)^2 - \frac{|x|}{y}\sqrt{\frac{4x}{3y}+1} = 0,$$

$$\left(\frac{|x|}{2y} - \sqrt{\frac{4x}{3y}+1}\right)^2 = 0, \quad \frac{|x|}{2y} - \sqrt{\frac{4x}{3y}+1} = 0.$$

Таким образом, заданная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x^2-12y=15, \\ \dfrac{|x|}{2y}=\sqrt{\dfrac{4x}{3y}+1}. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) равносильна такой смешанной системе:

$$\begin{cases} x^2-12y=15, \\ \dfrac{x^2}{4y^2}=\dfrac{4x}{3y}+1, \\ y>0,\ \dfrac{4x}{3y}+1\geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из второго уравнения системы (3) находим

$$\frac{x}{y}=6 \quad \text{или} \quad \frac{x}{y}=-\frac{2}{3}.$$

Следовательно, заданная система равносильна следующим двум смешанным системам:

$$\begin{cases} x^2-12y=15, \\ x=6y, \\ y>0 \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} x^2-12y=15, \\ x=-\dfrac{2}{3}y, \\ y>0, \\ \dfrac{4x}{3y}+1\geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из системы (4) получаем

$$x_1=5, \quad y_1=\frac{5}{6},$$

а из системы (5) находим

$$x_2=-(9+4\sqrt{6}), \quad y_2=\frac{3}{2}(9+4\sqrt{6}).$$

Ответ. $x_1=5,\ y_1=\dfrac{5}{6};\ \ x_2=-(9+4\sqrt{6}),\ \ y_2=\dfrac{3}{2}(9+4\sqrt{6})$.

164. Пусть $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=y=1$. Тогда

$$y-x_2=2,\ y-x_3=3,\ \ldots,\ y-x_{n-1}=n-1,\ y-x_n=n.$$

Но так как $y=1$, то $x_2=-1$, $x_3=-2$, ..., $x_n=-(n-1)$. Отсюда

$$x_2+x_3+\ldots+x_n=-[1+2+\ldots+(n-1)]=-\frac{n(n-1)}{2}.$$

Наконец,

$$x_1=1-(x_2+x_3+\ldots+x_n)=1+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Отв. $x_1=1+\dfrac{n(n-1)}{2}$, $x_2=-1$, $x_3=-2$, ..., $x_n=-(n-1)$.

165. Имеем

$$\begin{aligned}
x_2&=a_1-x_1,\\
x_3&=a_2-x_2=a_2-a_1+x_1,\\
x_4&=a_3-x_3=a_3-a_2+a_1-x_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n&=a_{n-1}-a_{n-2}+\ldots\pm a_2\mp a_1\pm x_1.
\end{aligned}$$

В последнем из этих равенств верхние знаки имеют место, когда n нечетное, а нижние знаки — когда n четное.

Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) Пусть n нечетное. Тогда

$$x_n=a_{n-1}-a_{n-2}+\ldots+a_2-a_1+x_1. \tag{1}$$

Из условия имеем

$$x_n=a_n-x_1. \tag{2}$$

Решая совместно (1) и (2), находим

$$x_1=\frac{a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-\ldots-a_2+a_1}{2}.$$

Теперь легко находим

$$x_2=\frac{a_1-a_n+a_{n-1}-\ldots-a_3+a_2}{2},$$

$$x_3=\frac{a_2-a_1+a_n-\ldots-a_4+a_3}{2}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2) Пусть теперь n четное. Тогда

$$x_n=a_{n-1}-a_{n-2}+\ldots-a_2+a_1-x_1. \tag{3}$$

Из условия имеем

$$x_n=a_n-x_1. \tag{4}$$

Следовательно, для совместности уравнений (3) и (4) должно быть выполнено равенство

$$a_{n-1}-a_{n-2}+\ldots-a_2+a_1=a_n,$$

или

$$a_n+a_{n-2}+\ldots+a_2=a_{n-1}+a_{n-3}+\ldots+a_1,$$

т. е. сумма коэффициентов с четными значками должна равняться сумме коэффициентов с нечетными значками.

Ясно, что в этом случае система будет неопределенна, т. е. будет допускать бесчисленное множество решений, а именно:

$$x_1=\lambda,$$
$$x_2=a_1-\lambda,$$
$$x_3=a_2-a_1+\lambda,$$
$$x_4=a_3-a_2+a_1-\lambda,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=a_{n-1}-a_{n-2}+\ldots+a_3-a_2+a_1-\lambda,$$

где λ — произвольная величина.

166. Из двух последних уравнений системы находим $x+n$ и $y+b$

$$x+n=\frac{(c-m)(n-a)}{z+c},$$
$$y+b=\frac{(b-l)(m-c)}{z+m}.$$

Далее находим

$$x+a=\frac{(c-m)(n-a)}{z+c}-(n-a)=(a-n)\frac{z+m}{z+c}.$$

Также

$$y+l=(l-b)\frac{z+c}{z+m}.$$

Подставляя найденные значения $x+a$ и $y+l$ в первое уравнение исходной системы, убеждаемся, что оно есть следствие вторых двух.

Таким образом, система неопределенна и все решения ее заключаются в формулах

$$x=\frac{(c-m)(n-a)}{z+c}-n,$$
$$y=\frac{(b-l)(m-c)}{z+m}-b$$

при произвольном значении z.

167. Складывая почленно все три уравнения системы, получим

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=2a^3+2b^3+2c^3. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) и первого уравнения заданной системы находим

$$2(b+c)x=2b^3+2c^3. \qquad (2)$$

Из (1) и второго уравнения системы находим

$$2(c+a)y=2a^3+2c^3, \qquad (3)$$

а из (1) и третьего уравнения системы получаем

$$2(a+b)z=2a^3+2b^3. \tag{4}$$

Из равенств (2), (3) и (4) находим

$$x=b^2-bc+c^2,$$
$$y=a^2-ac+c^2,$$
$$z=a^2-ab+b^2.$$

168. Перемножив левые и правые части уравнений, получим

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{n-2}=a_1a_2\ldots a_n,$$

откуда

$$x_1x_2\ldots x_n=\sqrt[n-2]{a_1a_2\ldots a_n}; \tag{1}$$

k-е уравнение системы перепишем в виде

$$a_kx_k^2=x_1x_2\ldots x_n.$$

Отсюда в силу (1) имеем

$$x_k=\sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2\ldots a_n}}{a_k}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Проверкой убеждаемся, что этот набор чисел удовлетворяет исходной системе. Таким образом, система уравнений имеет единственное решение.

169. Возведя обе части первого уравнения системы в квадрат, получим

$$\sqrt{x^2-y^2}=x-\frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

Тогда, учитывая второе уравнение системы, имеем

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3a^2}{2}-x. \tag{2}$$

Возведя теперь в квадрат обе части второго уравнения исходной системы, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2-y^2}=\frac{a^4}{2}-x^2.$$

Отсюда в силу (1) и (2)

$$\frac{a^4}{2}-x^2=\left(x-\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{3a^2}{2}-x\right).$$

Раскрыв скобки, найдем

$$x=\frac{5}{8}a^2.$$

После этого из уравнения (1) легко получим два значения y:

$$y_1=a^2\sqrt{\frac{3}{8}},\quad y_2=-a^2\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Проверкой обнаруживаем, что исходное уравнение имеет лишь одно решение:

$$\left(\frac{5}{8}a^2,\quad a^2\sqrt{\frac{3}{8}}\right).$$

170. Раскрыв скобки, запишем второе уравнение в виде

$$x^2+y^2+z^2+3xy+3xz+3yz=1,$$

или

$$(x+y+z)^2+xy+xz+yz=1.$$

Отсюда, используя первое уравнение заданной системы, получаем

$$xy+xz+yz=-3. \tag{1}$$

Третье уравнение системы представим в виде

$$x(xy+xz)+y(yz+xy)+z(xz+yz)=-6.$$

Тогда, принимая во внимание (1), будем иметь

$$x(3+yz)+y(3+xz)+z(3+xy)=6,$$

или

$$x+y+z+xyz=2,$$

т. е.

$$xyz=0.$$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=-3, \\ xyz=0. \end{cases} \tag{2}$$

Из последнего уравнения системы (2) следует, что по крайней мере одно неизвестное равно нулю.

Пусть $x=0$, тогда $y+z=2$, $yz=-3$, откуда либо $y=3$, $z=-1$, либо $y=-1$, $z=3$.

Аналогично рассматриваются случаи $y=0$ и $z=0$. Таким образом, получаем шесть решений (x, y, z) системы (2). Легко проверить, что все эти наборы чисел удовлетворяют и исходной системе. Таким образом, эта система имеет шесть решений.

Ответ. 0, 3, —1; —1, 0, 3; 0, —1, 3; 3, —1, 0; 3, 0, —1; —1, 3, 0.

171. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вещественное решение системы. Числа $x_k\,(k=1, \ldots, n)$, очевидно, должны быть одного знака. Предположим для определенности, что все $x_k>0$. В противном случае мы бы могли поменять знак во всех уравнениях системы. Покажем, что

$$x_k\geqslant\sqrt{2}\quad(k=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Имеем

$$\left(x_k-\frac{2}{x_k}\right)^2\geqslant 0.$$

Раскрывая скобки и прибавляя к обеим частям 8, получаем

$$x_k^2+4+\frac{4}{x_k^2}\geqslant 8.$$

Отсюда

$$\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)^2\geqslant 8$$

и, следовательно,

$$\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)\geqslant 2\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Из уравнений исходной системы и (2) следует неравенство (1). Сложив теперь все уравнения заданной системы, получим

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{2}{x_n}.$$

При условии (1) равенство здесь, очевидно, возможно лишь в том случае, когда все неизвестные равны $\sqrt{2}$. Так как легко проверить, что набор чисел $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt{2}$ удовлетворяет исходной системе, то система имеет, и притом лишь одно, положительное решение. Поменяв знак у значений неизвестных, мы получим еще одно вещественное решение:

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=-\sqrt{2}.$$

Этими двумя решениями, таким образом, исчерпываются все вещественные решения.

Отв. $x_1=x_2=\ldots=x_n=+\sqrt{2}$; $x_1=x_2=\ldots=x_n=-\sqrt{2}$.

172. Подставив во второе уравнение заданной системы вместо z его значение из первого уравнения, получим

$$x^2+x+y^2+y-a=0.$$

Решая это равенство относительно x, получаем

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-y^2-y+a}.$$

Так как по условию задачи x должен принимать единственное вещественное значение, то $\sqrt{\frac{1}{4}-y^2-y+a}$ должен быть равен нулю и $x=-\frac{1}{2}$. Поскольку оба уравнения системы симметричны относительно x и y, то и $y=-\frac{1}{2}$.

Подставив значения x и y в первое уравнение, получим $z=\frac{1}{2}$.

Далее, подставив значения x, y и z во второе уравнение, получим $a=-\frac{1}{2}$.

Отв. $x=y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$ при $a=-\frac{1}{2}$.

173. Из второго уравнения данной системы следует, что $y-4=|x+1|$. Так как $|x+1|\geqslant 0$, то $y-4\geqslant 0$. Таким образом, первое уравнение системы перепишем так: $|x+1|+y-4=2$, откуда $|x+1|=6-y$. Итак, имеем

$$6-y=y-4,$$

откуда $y=5$.

Теперь найдем значения x. Имеем $|x+1|=y-4=5-4=1$. Если $x+1\geqslant 0$, то $x+1=1$ и $x=0$. Если же $x+1\leqslant 0$, то $-x-1=1$ и $x=-2$.

Отв. $x_1=0$, $y_1=5$; $x_2=-2$, $y_2=5$.

174. Второе уравнение исходной системы можно представить так:

$$(x+y)^2-2xy+z^2=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3,$$

или, поскольку $x+y=-z$ и $xy=\frac{2}{z}$,

$$z^3-3z-2=0,$$

т. е.

$$(z+1)(z+1)(z-2)=0,$$

откуда

$$z_1=z_2=-1, \quad z_3=2.$$

Теперь легко определить значения x и y.

Отв. $x_1=-1$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=-1$; $x_3=-1$, $y_3=-1$.

Глава IV

НЕРАВЕНСТВА В АЛГЕБРЕ. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

175. Пусть корни данного уравнения x_1 и x_2. Имеем

$$x_1+x_2=a-2, \quad x_1\cdot x_2=-(a+1).$$

Далее,

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$x_1^2+x_2^2=(a-2)^2+2a+2,$$

$$x_1^2+x_2^2=a^2-2a+6=(a-1)^2+5.$$

Очевидно, что $x_1^2+x_2^2$ принимает наименьшее значение, когда $(a-1)^2=0$, т. е. при $a=1$.

Отв. При $a=1$.

176. Имеем

$$A=x^2+2x(y+1)+2y^2+4y+3=x^2+2(y+1)x+(y+1)^2+$$
$$+2y^2+4y+3-(y+1)^2=(x+y+1)^2+(y+1)^2+1.$$

Отсюда вытекает, что A принимает наименьшее значение, равное единице, когда $x+y+1=0$ и $y+1=0$ одновременно, т. е. при $x=0$ и $y=-1$.

Отв. При $x=0$, $y=-1$.

177. Имеем

$$M=x^2-2x+1+4y^2-12y+9+3(z^2-2z+1)+1=$$
$$=(x-1)^2+(2y-3)^2+3(z-1)^2+1>0,$$

что очевидно.

178. Преобразуем левую часть доказываемого неравенства так:

$$x^2+y^2+z^2+u^2+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+ax+ay+az+au=$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2+\left(u+\frac{a}{2}\right)^2.$$

Итак, левая часть доказываемого неравенства есть сумма квадратов, и, следовательно, она неотрицательна. Знак равенства имеет место лишь при $x=y=z=u=-\frac{a}{2}$.

179. Рассмотрим разность

$$(x^3+1)-(x^2+x)=(x+1)(x^2-x+1-x)=(x+1)(x-1)^2.$$

Мы видим, что эта разность принимает значение нуль при $x=\pm 1$. При $x>-1$ (исключая $x=1$) эта разность положительна. При $x<-1$ разность отрицательна.

Отв. При $x=\pm 1$ заданные выражения равны,
при $x>-1$ (исключая $x=1$) $x^3+1>x^2+x$,
при $x<-1$ справедливо $x^3+1<x^2+x$.

180. Должно быть

$$x^2+3kx+x+3k-kx^2-x^2-4kx+4k>0,$$

т. е.

$$-kx^2-(k-1)x+7k>0. \qquad (1)$$

Для того чтобы это неравенство имело место при любом значении x, необходимо, чтобы при $-k>0$ корни левой части неравенства (1) были мнимыми, т. е. необходимо, чтобы $(k-1)^2+28k^2<0$, что не имеет места ни при каком значении k.

Следовательно, требование задачи не может выполняться ни при каком значении k.

Отв. Нет решения.

181. Первое решение. Так как $a+b\geqslant 1$, то

$$a^2+2ab+b^2\geqslant 1. \qquad (1)$$

Сложив неравенство (1) с очевидным неравенством $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$, получим $2a^2+2b^2\geqslant 1$, или

$$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Возведя обе части неравенства (2) в квадрат, получим

$$a^4+2a^2b^2+b^4\geqslant\frac{1}{4}. \qquad (3)$$

Сложив неравенство (3) с очевидным неравенством $a^4-2a^2b^2+b^4\geqslant 0$, получим $2a^4+2b^4\geqslant\frac{1}{4}$, или

$$a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}.$$

Знак равенства имеет место при $|a|=|b|=\frac{1}{2}$.

Второе решение. Пусть $a=\frac{1}{2}+x$, $b=\frac{1}{2}-y$, где $x-y\geqslant 0$. Тогда

$$a^4=\left(\frac{1}{2}+x\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2+2x^3+x^4,$$

$$b^4=\left(\frac{1}{2}-y\right)^4=\frac{1}{16}-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y^2-2y^3+y^4,$$

$$a^4+b^4=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(x-y)+\frac{3}{2}(x^2+y^2)+2(x^3-y^3)+x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}.$$

При $x=y=0$ имеем $a=b=\frac{1}{2}$ и $a^4+b^4=\frac{1}{8}$. Если $x\neq 0$ или $y\neq 0$, то $a^4+b^4>\frac{1}{8}$.

182. Первое решение. Из условия, что $a+b=1$, следует, что

$$a^2+2ab+b^2=1; \qquad (1)$$

сложив равенство (1) с очевидным неравенством $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$, получим

$$2a^2+2b^2\geqslant 1. \qquad (2)$$

Возведем обе части неравенства (2) в квадрат

$$4a^4+8a^2b^2+4b^4\geqslant 1. \qquad (3)$$

Сложив неравенство (3) с очевидным неравенством $4a^4+4b^4-8a^2b^2\geqslant 0$, получим

$$8a^4+8b^4\geqslant 1,$$

или

$$64a^8+64b^8+128a^4b^4\geqslant 1. \qquad (4)$$

Сложив неравенство (4) с очевидным неравенством

$$64a^8+64b^8-128a^4b^4\geqslant 0,$$

получим

$$128a^8+128b^8\geqslant 1,$$

откуда

$$a^8+b^8\geqslant\frac{1}{128}.$$

Второе решение. Пусть $a=\frac{1}{2}+x$, тогда из условия $a+b=1$ следует, что $b=\frac{1}{2}-x$, где $|x|<\frac{1}{2}$. Тогда

$$a^8+b^8=\left(\frac{1}{2}+x\right)^8+\left(\frac{1}{2}-x\right)^8=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^8+C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^6x^2+\right.$$

$$\left.+C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^4x^4+C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^2x^6+x^8\right]\geqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{128}.$$

Если $a=b=\frac{1}{2}$, то $a^8+b^8=\frac{1}{128}$; если же $a\neq b$, то $a^8+b^8>\frac{1}{128}$.

183. Преобразуем левую часть доказываемого неравенства так:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}=\sqrt{ab+bc+ad+cd+2\sqrt{abcd}-2\sqrt{abcd}}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2+(\sqrt{bc}-\sqrt{ad})^2}. \quad (1)$$

Заметим, что

$$\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab+cd+2\sqrt{abcd}}\leqslant\sqrt{ab+cd+bc+ad}, \quad (2)$$

так как $2\sqrt{abcd}\leqslant bc+ad$.

Из (1) и (2) следует

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2}=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

184. Доказываемое неравенство равносильно таким:

$$2a^2+2b^2+2\geqslant 2ab+2a+2b,$$

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1\geqslant 0,$$

$$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0. \quad (1)$$

Справедливость неравенства (1) очевидна. Следовательно, справедливо и исходное неравенство. Знак равенства имеет место при $a=b=1$.

185. Рассмотрим разность

$$k(n-k+1)-n=nk-k^2+k-n=$$

$$=k(n-k)-(n-k)=(n-k)(k-1). \quad (1)$$

Так как $n \geqslant k$ и $k \geqslant 1$, то $(n-k)(k-1) \geqslant 0$. Следовательно, $k(n-k+1) \geqslant n$. Ясно, что $k(n-k+1)=n$ только при $n=k$ или при $k=1$.

186. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$(n!)^2 \geqslant n^n.$$

Воспользовавшись неравенством

$$k(n-k+1) \geqslant n \quad \text{при} \quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

(см. задачу 185), получим следующие соотношения:

$$1 \cdot n = n,$$
$$2(n-1) > n,$$
$$3(n-2) > n,$$
$$\ldots\ldots$$
$$(n-1)2 > n,$$
$$n \cdot 1 = n.$$

Перемножив эти соотношения, получим

$$n!n! \geqslant n^n,$$

т. е.

$$(n!)^2 \geqslant n^n.$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}.$$

Знак равенства имеет место лишь при $n=1$ и $n=2$.

187. Преобразуем доказываемое неравенство последовательно в равносильные неравенства:

$$a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 - 6a^2b^2 \geqslant 0,$$
$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \geqslant 0,$$
$$(a^2-b^2)^2 + 2ab\,(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $(a^2-b^2)^2 \geqslant 0$, $a \cdot b \geqslant 0$ и $(a-b)^2 \geqslant 0$. Следовательно,

$$a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geqslant 6a^2b^2.$$

188. Рассмотрим разность

$$(b^2 + a^4 - ab) - (a^3b + 4a^2b) = a^4 - 2a^2b + b^2 - a^3b - 2a^2b - ab =$$
$$= (a^2-b)^2 - ab\,(a^2+2a+1) = (a^2-b)^2 - ab\,(a+1)^2.$$

Так как $ab \leqslant 0$ и $(a+1)^2 \geqslant 0$, то $-ab\,(a+1)^2 \geqslant 0$. Итак, левая часть представляет сумму неотрицательных величин, т. е. $(a^2-b)^2 - ab\,(a+1)^2 \geqslant 0$, или

$$(b^2 + a^4 - ab) - (a^3b + 4a^2b) \geqslant 0,$$

откуда

$$b^2+a^4-ab\geqslant a^3b+4a^2b.$$

189. Дискриминант квадратного трехчлена

$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)\,x+c^2$$

равен

$$D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2+2bc)\,(b^2+c^2-a^2-2bc)=$$
$$=-[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]=$$
$$=-(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c).$$

Так как сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны, то

$$b+c-a>0,\quad a+c-b>0,\quad a+b-c>0$$

и, значит, $D<0$. Таким образом, $D<0$ и $b^2>0$ (коэффициент при x^2). Следовательно, $f(x)>0$ при любом значении x.

190. Первое решение. Имеем

$$a^2+b^2-2ab\geqslant 0,$$

или

$$a^2-ab+b^2\geqslant ab. \qquad (1)$$

Умножив обе части неравенства (1) на сумму $a+b$, получим

$$a^3+b^3\geqslant ab\,(a+b),$$

или

$$3a^3+3b^3\geqslant 3a^2b+3ab^2. \qquad (2)$$

Прибавив к обеим частям неравенства (2) сумму a^3+b^3, получаем

$$4\,(a^3+b^3)\geqslant (a+b)^3,$$

или

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\frac{(a+b)^3}{8}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Второе решение. Рассмотрим разность

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{4\,(a^3+b^3)-(a+b)^3}{8}=\frac{a+b}{8}\,3\,(a-b)^2\geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Знак равенства имеет место лишь при $a=b$.

Третье решение. Доказываемое неравенство равносильно такому:

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{2b}{a+b}\right)^3\geqslant 2,$$

или

$$\left(\frac{a+b+a-b}{a+b}\right)^3+\left(\frac{a+b-a+b}{a+b}\right)^3\geqslant 2,$$

или

$$\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^3+\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)^3\geqslant 2,$$

или

$$2+6\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\geqslant 2,$$

что очевидно.

191. Первое решение. При $n=0$ имеем

$$\frac{a^n+b^n}{2}=\frac{1+1}{2}=1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n=1,$$

т. е. обе части доказываемого соотношения равны.

При $n=1$

$$\frac{a^n+b^n}{2}=\frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n=\frac{a+b}{2}.$$

Таким образом, и в этом случае обе части доказываемого соотношения равны между собой.

При $n>1$ и $a=b$

$$\frac{a^n+b^n}{2}=a^n, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^n=a^n,$$

т. е. и в этом случае имеет место знак равенства.

Докажем, что при $n>1$ и $a\neq b$ левая часть доказываемого соотношения больше правой.

Пусть для определенности $a>b$. Рассмотрим две разности:

$$(2a)^n-(a+b)^n, \tag{1}$$

$$(a+b)^n-(2b)^n. \tag{2}$$

Обе эти разности являются разностями степеней, поэтому они делятся на разности оснований. В обоих случаях разности оснований равны $a-b$. Разделим (1) и (2) на $a-b$, получим соответственно

$$\frac{(2a)^n-(a+b)^n}{a-b}=(2a)^{n-1}+(2a)^{n-2}\cdot(a+b)+$$

$$+(2a)^{n-3}\cdot(a+b)^2+\ldots+2a\,(a+b)^{n-2}+(a+b)^{n-1}, \tag{3}$$

$$\frac{(a+b)^n-(2b)^n}{a-b}=(a+b)^{n-1}+(a+b)^{n-2}\,(2b)+$$

$$+(a+b)^{n-3}\,(2b)^2+\ldots+(a+b)\,(2b)^{n-2}+(2b)^{n-1}. \tag{4}$$

В правых частях равенств (3) и (4) одинаковое число членов n. Так как $a>b$, то $2a>a+b>2b$, а следовательно, каждый член правой части равенства (3) больше соответствующего члена равенства (4).

Отсюда

$$\frac{(2a)^n-(a+b)^n}{a-b}>\frac{(a+b)^n-(2b)^n}{a-b}.$$

Поскольку по условию $a-b>0$, то

$$(2a)^n-(a+b)^n>(a+b)^n-(2b)^n,$$

или

$$(2a)^n+(2b)^n>2(a+b)^n. \tag{5}$$

Разделив обе части неравенства (5) на 2^{n+1}, получим

$$\frac{a^n+b^n}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Второе решение. Доказываемое неравенство равносильно такому:

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^n+\left(\frac{2b}{a+b}\right)^n\geqslant 2,$$

или

$$\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n+\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)^n\geqslant 2. \tag{1}$$

Раскрыв слагаемые левой части неравенства (1) по формуле бинома Ньютона, мы придем к очевидному неравенству. Действительно,

$$\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^n+\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)^n=$$

$$=2\left[1+C_n^2\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+C_n^4\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4+\ldots\right]\geqslant 2.$$

192. Первое решение. Рассмотрим очевидное неравенство

$$(a+c)^2+(b-d)^2\geqslant 0,$$

или

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac-bd)\geqslant 0. \tag{1}$$

Так как $a^2+b^2+c^2+d^2=2$, то из неравенства (1) следует, что

$$ac-bd\geqslant -1. \tag{2}$$

Точно так же, исходя из неравенства

$$(a-c)^2+(b+d)^2\geqslant 0,$$

получим

$$bd-ac\geqslant -1,$$

или

$$ac-bd\leqslant 1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) заключаем, что

$$|ac-bd|\leqslant 1.$$

Второе решение. Перемножив почленно данные равенства $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$, получим

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=1. \qquad (1)$$

К левой части равенства (1) прибавим $0=2abcd-2abcd$, т. е. запишем

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+2abcd-2abcd=1,$$

откуда

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=1.$$

Так как $(bc+ad)^2\geqslant 0$, то $(ac-bd)^2\leqslant 1$, что равносильно $|ac-bd|\leqslant 1$.

Третье решение. Исходя из условия задачи, можно подобрать углы α и β так, чтобы $\sin\alpha=a$, $\cos\alpha=b$, $\sin\beta=c$ и $\cos\beta=d$.

Итак, требуется доказать, что $|\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta|\leqslant 1$, что очевидно, так как

$$|-\cos(\alpha+\beta)|\leqslant 1.$$

193. Рассмотрим два очевидных неравенства:

$$(m-a)^2+(n-b)^2+(p-c)^2\geqslant 0 \qquad (1)$$

и

$$(m+a)^2+(n+b)^2+(p+c)^2\geqslant 0. \qquad (2)$$

Из (1) имеем

$$ma+nb+pc\leqslant 1. \qquad (3)$$

Из (2) имеем

$$ma+nb+pc\geqslant -1. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$|ma+nb+pc|\leqslant 1.$$

194. Складывая очевидные неравенства

$$-|\alpha|\leqslant\alpha\leqslant|\alpha| \quad \text{и} \quad -|\beta|\leqslant\beta\leqslant|\beta|,$$

получим

$$-(|\alpha|+|\beta|)\leqslant\alpha+\beta\leqslant|\alpha|+|\beta|,$$

что равносильно неравенству

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \qquad (1)$$

Заметим, что неравенство (1) является частным случаем такого неравенства:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+\ldots+|\alpha_n|.$$

195. Если в предыдущей задаче заменить β на $-\beta$, то получим

$$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \qquad (1)$$

Так как $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$, то на основании (1) $|\alpha|\leqslant|\alpha+\beta|+|\beta|$, т. е.

$$|\alpha+\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|.$$

196. Если в предыдущей задаче заменим β на $-\beta$ и учтем, что $|\beta|=|-\beta|$, то получим

$$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|.$$

197. Первое решение. Рассмотрим n очевидных неравенств

$$(a_1x-b_1)^2\geqslant 0,$$
$$(a_2x-b_2)^2\geqslant 0,$$
$$(a_3x-b_3)^2\geqslant 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_nx-b_n)^2\geqslant 0,$$

или

$$a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2\geqslant 0,$$
$$a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2\geqslant 0,$$
$$a_3^2x^2-2a_3b_3x+b_3^2\geqslant 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2\geqslant 0.$$

Складывая почленно эти n неравенств и учитывая, что

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=1 \quad \text{и} \quad b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2=1,$$

получим неравенство

$$x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)x+1\geqslant 0, \qquad (1)$$

справедливое при любом значении x.

Но для того, чтобы неравенство (1) было справедливо при любом значении x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант левой части неравенства был не положителен, т. е. должно быть

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant 1,$$

или

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n|\leqslant 1,$$

что равносильно

$$-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n\leqslant 1.$$

Второе решение. Как известно, для любых вещественных чисел a и b имеет место неравенство

$$|a\cdot b|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}. \tag{1}$$

Пользуясь тем, что абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин соответствующих слагаемых, и используя соотношение (1), имеем

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leqslant|a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+\ldots+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=$$
$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{2}=\frac{1+1}{2}=1,$$

что и требовалось доказать.

Третье решение. Имеем

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2\geqslant0 \tag{1}$$

и

$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2\geqslant0. \tag{2}$$

Введем обозначение

$$x=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n. \tag{3}$$

Тогда, учитывая условия задачи, перепишем (1) и (2) соответственно в виде

$$2-2x\geqslant0 \tag{3}$$

и

$$2+2x\geqslant0. \tag{4}$$

Получим $x\leqslant1$ и $x\geqslant-1$, т. е. $-1\leqslant x\leqslant1$, или

$$-1\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant1.$$

198. Так как $\log_6 7>1$, то выражение $(\log_6 7)^{\sin x}$ достигает наибольшего значения, когда $\sin x$ принимает наибольшее значение, т. е. при $\sin x=1$.

Итак, наибольшее значение выражения $(\log_6 7)^{\sin x}$ равно $\log_6 7$.

Поскольку $0<\log_7 6<1$, то выражение $(\log_7 6)^{\cos x}$ достигает максимума при наименьшем значении $\cos x$, т. е. при $\cos x=-1$.

Таким образом, наибольшее значение выражения $(\log_7 6)^{\cos x}$ есть $(\log_7 6)^{-1}=\frac{1}{\log_7 6}=\log_6 7$.

Следовательно, наибольшие значения выражений $(\log_6 7)^{\sin x}$ и $(\log_7 6)^{\cos x}$ одинаковы.

199. Имеем

$$\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10>2.$$

200. Первое решение. Поделив обе части заданного равенства $x^2=y^2+z^2$ на x^2, получим

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=1.$$

Отсюда ясно, что $0<\frac{y}{x}<1$ и $0<\frac{z}{x}<1$. Следовательно, при $\alpha<2$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha+\left(\frac{z}{x}\right)^\alpha>\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=1,$$

т. е.

$$x^\alpha<y^\alpha+z^\alpha;$$

при $\alpha>2$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha+\left(\frac{z}{x}\right)^\alpha<\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^2=1,$$

т. е.

$$x^\alpha>y^\alpha+z^\alpha.$$

Второе решение. Очевидно, что $y<x$ и $z<x$. Поэтому при $\alpha>2$

$$y^\alpha+z^\alpha=y^2\cdot y^{\alpha-2}+z^2\cdot z^{\alpha-2}<y^2\cdot x^{\alpha-2}+z^2\cdot x^{\alpha-2}=$$
$$=(y^2+z^2)\,x^{\alpha-2}=x^2\cdot x^{\alpha-2}=x^\alpha,$$

т. е.

$$x^\alpha>y^\alpha+z^\alpha;$$

при $\alpha<2$

$$y^\alpha+z^\alpha=y^2\cdot y^{\alpha-2}+z^2\cdot z^{\alpha-2}>y^2\cdot x^{\alpha-2}+z^2\cdot x^{\alpha-2}=$$
$$=(y^2+z^2)\,x^{\alpha-2}=x^2\cdot x^{\alpha-2}=x^\alpha,$$

т. е.

$$x^\alpha<y^\alpha+z^\alpha.$$

201. Имеем

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n=1+\frac{2n}{\sqrt{n}}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{4}{n}+\ldots>1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{n}=n.$$

Следовательно,

$$1+\frac{2}{\sqrt{n}}>\sqrt[n]{n}. \qquad (1)$$

Так как по условию $n>2$, то

$$\sqrt[n]{n}>1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$1 < \sqrt[n]{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

202. Имеем

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n},$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n},$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n},$$
$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Сложив эти соотношения, получим

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

203. Напишем ряд очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

что и требовалось доказать.

204. Так как

$$\frac{1}{2} < 1, \quad \frac{3}{4} < 1, \quad \frac{5}{6} < 1, \ldots, \quad \frac{2n-1}{2n} < 1,$$

то, перемножая почленно эти неравенства, получим

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} < 1$$

и, следовательно,

$$\sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}} < 1. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad \frac{3}{4}>\frac{1}{2},\quad \frac{5}{6}>\frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2},$$

то, перемножая эти соотношения, находим

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\geqslant\frac{1}{2^n}.$$

Отсюда

$$\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}}\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Заметим, что в соотношении (2) знак равенства имеет место только при $n=1$, а при $n>1$ справедливо строгое неравенство.

В силу (1) и (2) имеем

$$\frac{1}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}}<1.$$

205. Заметим, что наибольший член можно всегда поместить на первое место путем перестановок членов пропорций. Итак, пусть a — наибольший член. При этом последний член d будет наименьшим.

Действительно,

$$d=b\cdot\frac{c}{a}=c\cdot\frac{b}{a},$$

и так как дроби $\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a}$ не больше, чем 1, то $d\leqslant b$ и $d\leqslant c$. Очевидно также, что $d<a$.

Составим производную пропорцию

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}. \qquad (1)$$

Так как $a>c$, то из (1) следует, что $\frac{a-b}{c-d}>1$. Кроме того, $c-d>0$, поэтому имеем $a-b>c-d$ и, наконец, $a+d>b+c$, что и требовалось доказать.

206. 1) При $a\leqslant 0$ левая часть неравенства положительна, а правая часть не положительна, следовательно, в этом случае неравенство справедливо.

2) Теперь пусть $0<a<1$.

Преобразуем неравенство в равносильное ему неравенство

$$a^8+(a^2-a^5)+(1-a)>0. \qquad (1)$$

Так как в этом случае $a^2>a^5$ и $1>a$, то неравенство (1), а значит, и доказываемое неравенство справедливы.

3) Остается, наконец, рассмотреть случай $a\geqslant 1$.

Преобразуем доказываемое неравенство в эквивалентное ему

$$a^5(a^3-1)+a(a-1)+1>0. \qquad (2)$$

Так как $a \geqslant 1$, то левая часть неравенства (2) положительна, т. е. и в этом случае доказываемое неравенство имеет место.

207. Имеем

$$(1+x)^n+(1-x)^n=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+$$
$$+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n)+(C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+$$
$$+(-1)^n C_n^nx^n)=2(C_n^0+C_n^2x^2+C_n^4x^4+\ldots).$$

Так как $|x|<1$ и $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots=2^{n-1}$, то

$$(1+x)^n+(1-x)^n<2\cdot 2^{n-1}=2^n,$$

что и требовалось доказать.

208. Очевидно, что

$$\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p} \quad \text{и} \quad \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Поэтому подлежащее доказательству неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p}>\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}. \tag{1}$$

По условию $a>b>0$, поэтому $0<\frac{b}{a}<1$, и так как $p>n$, то $\left(\frac{b}{a}\right)^p<\left(\frac{b}{a}\right)^n$. Отсюда

$$1-\left(\frac{b}{a}\right)^p>1-\left(\frac{b}{a}\right)^n, \tag{2}$$

$$1+\left(\frac{b}{a}\right)^p<1+\left(\frac{b}{a}\right)^n. \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) следует, что

$$\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^p}>\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n},$$

а это доказывает утверждение задачи.

209. Очевидно, что

$$\left.\begin{array}{ll} 4x+1\leqslant 4x^2+4x+1, & \text{или } \sqrt{4x+1}\leqslant|2x+1|, \\ 4y+1\leqslant 4y^2+4y+1, & \text{или } \sqrt{4y+1}\leqslant|2y+1|, \\ 4z+1\leqslant 4z^2+4z+1, & \text{или } \sqrt{4z+1}\leqslant|2z+1|. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Так как по условию $x \geqslant -\frac{1}{4}$, то $2x+1>0$; аналогично $2y+1>0$ и $2z+1>0$. Поэтому в (1) знак модуля можно опустить.

Из полученных неравенств (1) следует

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leqslant 2(x+y+z)+3.$$

Но так как согласно условию $x+y+z=1$, то

$$\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leqslant 5.$$

210. Поскольку $xy=zt$, то $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$. Пусть $x=kt$, тогда $z=ky$. Подставив эти значения x и z в заданное неравенство $x-y>z-t>0$, получаем

$$kt-y>ky-t,$$

или

$$kt+t>ky+y,$$

т. е.

$$t(k+1)>y(k+1). \tag{1}$$

Так как $x>0$, $t>0$ и $x=kt$, то $k>0$ и $k+1>0$. Поэтому из (1) следует

$$t>y. \tag{2}$$

Так как $t>y$ и $xy=zt$, то

$$x>z. \tag{3}$$

Перемножив почленно неравенства (2) и (3), получаем

$$tx>yz,$$

или

$$2tx>2yz,$$

или

$$tx-yz>yz-tx,$$

или

$$xz-yz+tx-ty>zx-tx+zy-ty,$$

или

$$(x-y)(z+t)>(z-t)(x+y).$$

Умножив это неравенство на заданное $x-y>z-t$, получим $(x-y)^2(z+t)>(z-t)^2(x+y)$, что и требовалось доказать.

211. Имеем

$$x^2+xy+my^2-m=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+(m-1)(y^2-1)+\left(\frac{3y^2}{4}-1\right). \tag{1}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых правой части равенства (1).

Так как y—целое число, отличное от нуля, а m—целое положительное число, то $m-1 \geqslant 0$, $y^2-1 \geqslant 0$. Поэтому и произведение

$$(m-1)(y^2-1) \geqslant 0.$$

Кроме того, и

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое.

Пусть сначала $|y| \geqslant 2$, тогда

$$\frac{3y^2}{4} \geqslant 3, \quad \frac{3y^2}{4} - 1 \geqslant 2 > 0.$$

Таким образом, при $|y| \geqslant 2$

$$x^2 + xy + my^2 - m > 0.$$

Пусть теперь $|y| < 2$. Это значит, что $y = \pm 1$ (ведь $y \neq 0$). Но тогда

$$x^2 + xy + my^2 - m = x^2 \pm x = x(x \pm 1).$$

Так как x целое, то $x \pm 1$ тоже целое, а если два целых числа отличаются на единицу, то либо они имеют одинаковый знак, либо одно из них равно нулю. Поэтому их произведение не отрицательно.

Итак, и в этом случае, т. е. при $|y| < 2$, имеем

$$x^2 + xy + my^2 - m \geqslant 0.$$

212. Согласно условию задачи между a и b могут быть следующие соотношения: $a > b$ и $a < b$.

1) Пусть $a > b$. В этом случае требуется доказать, что

$$b < \frac{a + \alpha b}{1 + \alpha} < a.$$

Так как $1 + \alpha > 0$, то должно быть

$$b + \alpha b < a + b\alpha < a + a\alpha,$$

что очевидно.

2) Если же $a < b$, то требуется доказать, что

$$a < \frac{a + \alpha b}{1 + \alpha} < b,$$

или

$$a + \alpha a < a + \alpha b < b + \alpha b,$$

что тоже очевидно.

Заметим, что случай 2) легко сводится к случаю 1) так:

$$\frac{a + \alpha b}{1 + \alpha} = \frac{\frac{1}{\alpha} a + b}{\frac{1}{\alpha} + 1} = \frac{b + \alpha_1 a}{1 + \alpha_1},$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}$ и $b > a$.

213. Первое решение. Пусть $a=1+p$, $b=1-k$, где $p>0$ и $0<k<1$. Имеем

$$ab+1=(1+p)(1-k)+1=2+p-k-pk$$

и

$$a+b=(1+p)+(1-k)=2+p-k.$$

Так как

$$2+p-k-pk<2+p-k,$$

то

$$ab+1<a+b.$$

Второе решение.
Требуется доказать, что

$$ab+1-a-b<0,$$

или

$$b(a-1)-(a-1)<0,$$

или

$$(a-1)(b-1)<0.$$

Так как по условию $a>1$ и $b<1$, то

$$a-1>0 \quad \text{и} \quad b-1<0.$$

Следовательно, $(a-1)(b-1)<0$, т. е.

$$ab+1<a+b.$$

214. Имеем очевидное неравенство

$$(a-b)^2\geqslant 0,$$

или

$$a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

Так как $ab>0$, то, поделив обе части последнего неравенства на ab, получим

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2.$$

Знак равенства имеет место лишь при $a=b$.

215. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1+x^4}{x^2}\geqslant 2,$$

или

$$\frac{1}{x^2}+x^2\geqslant 2,$$

что очевидно (см. задачу 214). Знак равенства имеет место только при $x=\pm 1$.

216. Имеем

$$y=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2.$$

Так как $x-2>0$, то выражение

$$(x-2)+\frac{1}{x-2}\geqslant 2$$

(см. задачу 214) и равенство достигается при $x-2=1$, т. е. при $x=3$. Поэтому наименьшее значение y равно $2+2=4$.

Отв. 4.

217. Имеем

$$y=\frac{x^2+5x+4}{x}=x+\frac{4}{x}+5=2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)+5.$$

Так как $x>0$, то $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqslant 2$ (см. задачу 214), причем равенство достигается при $\frac{x}{2}=1$, т. е. при $x=2$. Поэтому y принимает наименьшее значение, равное $2\cdot 2+5=9$.

Отв. 9.

218. Имеем

$$y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Так как $\sqrt{x^2+1}>0$ и поскольку $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$ (см. задачу 214), то $y\geqslant 2$.

Очевидно, что знак равенства имеет место только при $x=0$.

219. Первое решение. 1) Докажем, что

$$\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Образуем разность

$$\frac{1}{2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x}{2(1+x^2)}=\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

Но $\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\geqslant 0$, следовательно, неравенство (1) имеет место при любом x.

2) Теперь докажем, что

$$\frac{x}{1+x^2}\geqslant-\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Образуем разность

$$\frac{x}{1+x^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2x+1+x^2}{2(1+x^2)}=\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}.$$

Так как $\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} \geqslant 0$, то, следовательно, неравенство (2) верно.

Из (1) и (2) следует, что $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Второе решение

1) При $x=0$ заданное неравенство верно.

2) Пусть $x \neq 0$, тогда $y=\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$. Если $x>0$, то $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$ (см. задачу 214), а потому

$$0 < y \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $x>0$ имеем

$$0 < \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

3) И, наконец, пусть $x<0$, тогда $x+\frac{1}{x} \leqslant -2$, а потому

$$-\frac{1}{2} \leqslant y < 0,$$

т. е. при $x<0$ имеем

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} < 0.$$

Итак, при любом x имеет место

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

220. Так как $abcd=1$, то $cd=\frac{1}{ab}$, $bd=\frac{1}{ac}$, $bc=\frac{1}{ad}$.

Учитывая, что $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$ (см. задачу 214), если $x>0$, имеем

$$ab+cd=ab+\frac{1}{ab} \geqslant 2, \tag{1}$$

$$ac+bd=ac+\frac{1}{ac} \geqslant 2, \tag{2}$$

$$ad+bc=ad+\frac{1}{ad} \geqslant 2. \tag{3}$$

Также имеем

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab, \tag{4}$$

$$c^2+d^2 \geqslant 2cd. \tag{5}$$

Складывая почленно неравенства (4) и (5), получаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant 2ab+2cd=2\left(ab+\frac{1}{ab}\right) \geqslant 4. \tag{6}$$

Складывая почленно неравенства (1), (2), (3) и (6), получаем

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bd+bc+cd \geqslant 10,$$

что и требовалось доказать.

221. Первое решение. Пусть x и y—такие два сомножителя, что их сумма равна $2c$, где c—постоянная величина. Имеем

$$xy=\frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2].$$

Так как $x+y=2c$, то произведение xy принимает наибольшее значение, когда $(x-y)^2$ принимает наименьшее значение, т. е. при $(x-y)^2=0$, а значит, при $x=y=c$.

Второе решение. Сохраним обозначения первого доказательства. Пусть x_1 и y_1—значения x и y, для которых $x_1=y_1$. Тогда, очевидно, $x_1=y_1=c$.

Пусть x_2 и y_2—какие-либо другие значения x и y, так что $x_2 \neq y_2$. Тогда, очевидно, $x_2 \neq c$ и $y_2 \neq c$. Обозначим $x_2=c+\alpha$. Тогда $y_2=c-\alpha$, где $\neq 0$. Найдем произведение

$$x_2y_2=(c+\alpha)\,(c-\alpha)=$$

$$=c^2-\alpha^2<c^2.$$

Так как $x_1y_1=c^2$, то $x_1y_1>x_2y_2$, что и требовалось доказать.

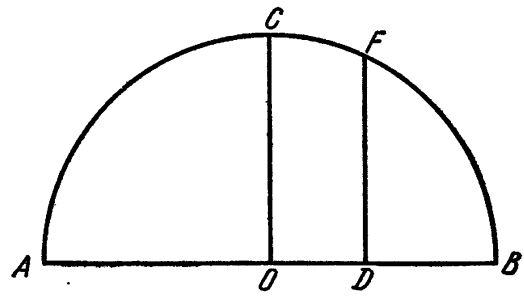

Рис. 1.

Третье решение (геометрическое). На отрезке $AB=2c=x+y$ построим, как на диаметре, полуокружность (рис. 1). Если O—центр окружности, то $OC=x_1=y_1=c$ и $OC^2=AB\cdot OB=c^2$. Если $x_2 \neq y_2$, то, откладывая $AD=x_2$, получим $y_2=DB$ и произведение $x_2y_2=AD\cdot DB=DF^2$. Но $DF<OC$, так как DF—полухорда, а OC—радиус.

Итак, $x_1y_1>x_2y_2$.

Четвертое решение. Пусть $x+y=2c$, а $x\cdot y=z$.

Требуется найти наибольшее возможное значение z. Имеем

$$y=2c-x \text{ и } y=\frac{z}{x},$$

откуда $2c-x=\frac{z}{x}$, или

$$x^2-2cx+z=0.$$

Для того чтобы x было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$c^2-z \geqslant 0.$$

Из этого соотношения заключаем, что наибольшее значение z есть c^2.

Так как $x+y=2c$, то наибольшее значение c^2 произведения xy достигается при $x=y=c$.

222. Эта теорема является обобщением предыдущей задачи. Действительно, произведения xy и $mx\cdot ny=mn\ (x+y)$ принимают наибольшие значения при одинаковых значениях x и y, а поскольку сумма $mx+ny$ постоянна, то $mx=ny=c$.

223. Первое решение. Имеем

$$x+y=\sqrt{4xy+(x-y)^2}.$$

Ясно, что $x+y$ принимает наименьшее значение при $(x-y)^2=0$, т. е. при $x=y$.

Второе решение. Пусть

$$x+y=z. \qquad (1)$$

Итак, задача сводится к нахождению наименьшего значения z.

Из условия следует, что $y=\frac{c^2}{x}$, а из (1) имеем $y=z-x$.

Таким образом, $z-x=\frac{c^2}{x}$, или

$$x^2-zx+c^2=0.$$

Для того чтобы x было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$z^2-4c^2\geqslant 0.$$

Из этого соотношения заключаем, что наименьшее значение z есть $2c$.

Итак,

$$xy=c^2 \text{ и } x+y=2c,$$

откуда $x=y=c$

Третье решение. Пусть x_1 и y_1—значения x и y, для которых $x_1=y_1$ (очевидно, что $x_1=y_1=c$ и $x_1+y_1=2c$), а x_2 и y_2 такие, что $x_2\neq y_2$.

Пусть $x_2=c+\alpha$, где $\alpha\neq 0$, тогда $y_2=\frac{c^2}{c+\alpha}$, так как $x_2y_2=c^2$.

Таким образом,

$$x_2+y_2=c+\alpha+\frac{c^2}{c+\alpha}>c+\alpha+\frac{c^2-\alpha^2}{c+\alpha}=c+\alpha+c-\alpha=2c.$$

Итак, $x_2+y_2>2c$.

224. Эта теорема является обобщением предыдущей теоремы. Действительно, если xy постоянно, то и произведение $mx\cdot ny$ также постоянно. Следовательно, на основании задачи 223 заключаем, что сумма $mx+ny$ принимает наименьшее значение при $mx=ny$.

225. Эта теорема является распространением задачи 221 на несколько сомножителей.

Приведем доказательство, принадлежащее Гурса. Пусть дано m переменных величин $x, y, z, \ldots, t$, сумма которых равна ma.

Пусть $x_1, y_1, z_1, \ldots, t_1$ такие значения $x, y, z, \ldots, t$, что

$$x_1 = y_1 = z_1 = \ldots = t_1 = a.$$

Тогда произведение

$$P_1 = x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 \ldots t_1 = a^m.$$

Пусть $x_2, y_2, z_2, \ldots, t_2$—такие значения $x, y, z, \ldots, t$, среди которых имеются неравные, но такие, что $x_2 + y_2 + z_2 + \ldots + t_2 = ma$.

Докажем, что произведение

$$P_2 = x_2 y_2 z_2 \ldots t_2 < P_1.$$

Поскольку среди значений $x_2, y_2, z_2, \ldots, t_2$ имеются неравные и так как их сумма равна ma, то среди них найдется хотя бы одно значение, большее a, и одно, меньшее a.

Пусть $x_2 = a + h$ и $y_2 = a - k$, где $h > 0$ и $k > 0$, тогда $x_2 + y_2 = 2a + h - k$.

Имеем

$$P_2 = (a + h)(a - k) z_2 \ldots t_2 = [a^2 + a(h - k) - kh] z_2 \ldots t_2.$$

Если заменим $x_2 = a + h$ на $x_3 = a$ и $y_2 = a - k$ на $y_3 = a + h - k$, то будем иметь $x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ и, следовательно, сумма всех сомножителей не изменится. Покажем, что при этой замене произведение увеличится.

Действительно,

$$a(a + h - k) = a^2 + a(h - k) > a^2 + a(h - k) - kh.$$

Таким образом, мы доказали, что $P_3 > P_2$, где P_3—произведение $x_3 y_3 z_2 \ldots t_2$.

Среди сомножителей P_3 по меньшей мере один (x_3) равен a.

Далее, если среди сомножителей произведения P_3 имеются неравные, то среди них имеются хотя бы два, один из которых больше a, а другой меньше a.

Проделав с этими двумя сомножителями такую же замену, как и в произведении P_3, мы также увеличим произведение, сохранив сумму, т. е. мы получим, что

$$P_4 > P_3 > P_2.$$

В произведении P_4 мы имеем уже по меньшей мере два сомножителя, равных a.

Такие операции будем проводить до тех пор, пока все сомножители не станут равными a. Поскольку с каждой операцией произведение увеличивается, то $P_2 < P_1$.

Так как эти рассуждения верны для любого P_2, можно заключить, что наибольшее значение произведения есть $P_1 = a^m$.

226. Проведем доказательство отдельно для случая, когда $p, q, \ldots, r$—целые числа, и для случая, когда среди $p, q, \ldots, r$ есть дробные числа.

1) Пусть $p, q, \ldots, r$ — целые числа. Ясно, что произведения $x^p \cdot y^q \ldots z^r$ и $\left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \ldots \left(\frac{z}{r}\right)^r$ достигают наибольших значений при одних и тех же значениях $x, y, \ldots, z$.

Имеем

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p \cdot \left(\frac{y}{q}\right)^q \ldots \left(\frac{z}{r}\right)^r =$$

$$= \overbrace{\left(\frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p} \ldots \frac{x}{p}\right)}^{p\text{ множ}} \cdot \overbrace{\left(\frac{y}{q} \cdot \frac{y}{q} \ldots \frac{y}{q}\right)}^{q\text{ множ}} \ldots \overbrace{\left(\frac{z}{r} \cdot \frac{z}{r} \ldots \frac{z}{r}\right)}^{r\text{ множ}}.$$

Это произведение состоит из $p+q+\ldots+r$ сомножителей, сумма которых постоянна и равна a, так как

$$\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots+\frac{x}{p}=\frac{x}{p}\cdot p=x,$$

$$\frac{y}{q}+\frac{y}{q}+\ldots+\frac{y}{q}=\frac{y}{q}\cdot q=y,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z}{r}+\frac{z}{r}+\ldots+\frac{z}{r}=\frac{z}{r}\cdot r=z.$$

Следовательно (см. задачу 225), имеем

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\ldots=\frac{z}{r},$$

что и требовалось доказать.

Так как

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\ldots=\frac{z}{r}=\frac{x+y+\ldots+z}{p+q+\ldots+r}=\frac{a}{p+q+\ldots+r},$$

то

$$x=\frac{pa}{p+q+\ldots+r},\quad y=\frac{qa}{p+q+\ldots+r},\quad \ldots,\quad z=\frac{ra}{p+q+\ldots+r},$$

а наибольшее значение произведения $x^p \cdot y^q \ldots z^r$ равно

$$p^p \cdot q^q \ldots r^r \left(\frac{a}{p+q+\ldots+r}\right)^{p+q+\ldots+r}.$$

2) Пусть среди чисел $p, q, \ldots, r$ есть дробные. После приведения этих дробей к общему знаменателю β имеем

$$p=\frac{\alpha}{\beta},\quad q=\frac{\alpha'}{\beta},\quad \ldots,\quad r=\frac{\alpha''}{\beta}.$$

Произведение

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot y^{\frac{\alpha'}{\beta}} \ldots z^{\frac{\alpha''}{\beta}}$$

принимает наибольшее значение одновременно со своей β-й степенью

$$x^{\alpha} \cdot y^{\alpha'} \ldots z^{\alpha''},$$

а это произведение, по доказанному в первом случае, принимает наибольшее значение при

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha'} = \ldots = \frac{z}{\alpha''},$$

или при

$$\frac{x}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)} = \ldots = \frac{z}{\left(\frac{\alpha''}{\beta}\right)},$$

или, наконец, при

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \ldots = \frac{z}{r},$$

что и требовалось доказать.

227. Первое решение. Требуется доказать, что

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \text{ где } a > 0 \text{ и } b > 0,$$

или

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0,$$

или

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

что очевидно.

Ясно, что знак равенства имеет место при $a = b$.

Второе решение (геометрическое). На отрезке $AB = a + b$, как на диаметре, строим полуокружность (рис. 2). Пусть $AD = a$,

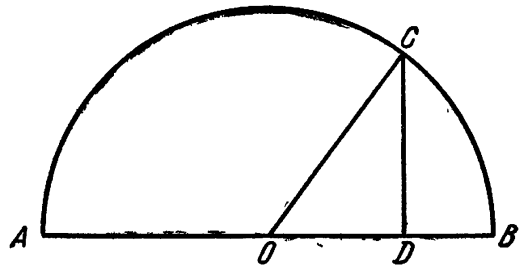

Рис. 2.

а $DB = b$. Из точки D диаметра AB проводим к AB перпендикуляр DC до пересечения с полуокружностью в точке C. Очевидно, что CD не больше радиуса OC. Так как

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{a \cdot b}, \text{ а } OC = \frac{a+b}{2},$$

то

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Знак равенства имеет место лишь при $a = b$.

228. Так как $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, то

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\quad \frac{c+d}{2}\geqslant\sqrt{cd}$$

(см. задачу 227). Перемножив почленно эти два неравенства, получим

$$\sqrt{abcd}\leqslant\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}. \tag{1}$$

Но

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\leqslant\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) получаем

$$\sqrt[4]{abcd}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Очевидно, что знак равенства имеет место лишь при $a=b=c=d$.

229. В силу задачи 228 имеем

$$a\cdot b\cdot c\cdot\frac{a+b+c}{3}\leqslant\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^4,$$

откуда

$$abc\cdot\frac{a+b+c}{3}\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4,$$

или

$$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

или

$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Очевидно, что равенство имеет место лишь при $a=b=c$.

230. Согласно условию

$$\left.\begin{aligned}&a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \ldots,\ a_m>0\\ &a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m=ma,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и

где ma — постоянная величина.

В силу задачи 225 имеем

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\ \ldots\ a_m\leqslant a^m. \tag{2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\ \ldots\ a_m\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m}\right)^m,$$

или

$$\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\ \ldots\ a_m}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m},$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема является обобщением задач 227, 228, 229.

231. Пусть $a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \ldots,\ a_m>0$ и

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\ \ldots\ a_m=b^m,$$

где b^m постоянно.

В силу предыдущей задачи имеем

$$\sqrt[m]{b^m}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m},$$

или

$$b\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m}{m}. \qquad (1)$$

Знак равенства имеет место лишь при

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m.$$

Из (1) имеем

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m\geqslant mb,$$

т. е. сумма $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m$ имеет наименьшее значение при $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_m$.

Эта теорема является обобщением задачи 223.

232. Имеем

$$y=x^2(3-2x)=x\cdot x(3-2x).$$

Так как y согласно условию есть произведение трех неотрицательных сомножителей, сумма которых постоянна

$$x+x+(3-2x)=3,$$

то y принимает наибольшее значение при равенстве сомножителей (задача 225), т. е. при

$$x=3-2x,$$

откуда $x=1$ и $y_{\max}=1\,(3-2)=1$.

Отв. $y_{\max}=1$.

233. Имеем

$$y=4x^3-x^4=x^3(4-x)=27\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}(4-x).$$

Так как y и $y_1=\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}(4-x)$ достигают максимума при одном и том же значении x, то рассмотрим функцию

$$y_1=\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{3}(4-x).$$

Эта функция есть произведение четырех неотрицательных сомножителей (так как $0\leqslant x\leqslant 4$), сумма которых постоянна:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+(4-x)=4.$$

Поэтому y_1 принимает наибольшее значение при равенстве сомножителей (задача 225), т. е. когда

$$\frac{x}{3}=4-x, \text{ или } x=3.$$

Поэтому

$$y_{\max}=27\cdot y_{1\max}=27\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{3}(4-3)=27.$$

Отв. $y_{\max}=27$.

234. Ясно, что $z=x+y$ принимает наименьшее значение одновременно с $z^2=(x+y)^2$. Но

$$z^2=x^2+y^2+2xy=x^2y^2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)+2xy=$$
$$=x^2y^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+2xy=\frac{x^2y^2}{a^2}+2xy=xy\left(\frac{xy}{a^2}+2\right).$$

Теперь очевидно, что z^2 принимает наименьшее значение, когда xy принимает наименьшее значение или когда $\frac{1}{xy}$, а следовательно, $\frac{1}{x^2y^2}$ принимает наибольшее значение. Но поскольку сумма $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$ постоянна, то $\frac{1}{x^2y^2}$ принимает наибольшее значение, когда

$$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2a^2}$$

(см. задачу 225), откуда $x=y=a\sqrt{2}$. Итак, наименьшее значение $z_{\min}=a\sqrt{2}+a\sqrt{2}=2a\sqrt{2}$.

Отв. $z_{\min}=2a\sqrt{2}$.

235. Имеем

$$z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2a}{xy}.$$

Так как $xy>0$, то выражение $\frac{2a}{xy}$ принимает наименьшее значение, когда xy принимает наибольшее значение. Но $x+y=2a$, следовательно, xy принимает наибольшее значение при $x=y=a$ (см. задачу 225).

Итак, наименьшее значение $z_{\min}=\frac{2a}{a\cdot a}=\frac{2}{a}$.

Отв. $z_{\min}=\frac{2}{a}$.

236. Умножим обе части заданного равенства на $k(k+1)$, где k — некоторая положительная постоянная, значение которой мы выберем позднее,

$$k(k+1)y=(k+1)x\cdot(40-x)\cdot(25k-kx). \quad (1)$$

Так как сумма

$$(k+1)x+(40-x)+(25k-kx)=40+25k$$

— постоянная величина, а числа $(k+1)x$, $40-x$, $25k-kx$ не отрицательны при $0 \leqslant x \leqslant 25$, то произведение

$$(k+1)x \cdot (40-x) \cdot (25k-kx)$$

принимает наибольшее значение, когда сомножители равны (конечно, если это возможно), т. е. когда

$$(k+1)x = 40-x = 25k-kx. \qquad (2)$$

Мы получили систему двух уравнений с одним неизвестным x:

$$\begin{cases} (k+1)x = 40-x, \\ (k+1)x = 25k-kx. \end{cases} \qquad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) получаем

$$x = \frac{40}{k+2}, \qquad (4)$$

а из второго уравнения

$$x = \frac{25k}{2k+1}. \qquad (5)$$

Постараемся теперь выбрать k так, чтобы система (3) была совместной. Для этого приравняем значения x из (4) и (5)

$$\frac{40}{k+2} = \frac{25k}{2k+1}.$$

Это — уравнение относительно k. Его положительный корень $k=2$.

Будем считать, что во всех предыдущих рассуждениях $k=2$. При этом система (3) совместна и дает $x=10$.

Итак, при $x=10$ три сомножителя в правой части (1) равны между собой и, значит, функция

$$k(k+1)y = 6y \quad (0 \leqslant x \leqslant 25)$$

при $x=10$ принимает наибольшее значение. Вместе с ней при $x=10$ принимает наибольшее значение и функция y $(0 \leqslant x \leqslant 25)$.

Таким образом,

$$y_{\max} = 10(40-10)(25-10) = 4500.$$

Ответ. $y_{\max} = 4500$.

237. Первое решение. Имеем

$$\frac{a+bx^4}{x^2} = \frac{a}{x^2} + bx^2 = \sqrt{ab}\left(\frac{\sqrt{a}}{x^2\sqrt{b}} + \frac{x^2\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) \geqslant 2\sqrt{ab},$$

так как при $m>0$ $m+\frac{1}{m} \geqslant 2$.

Второе решение. Имеем

$$\frac{a+bx^4}{x^2} = \frac{a}{x^2} + bx^2.$$

В силу задачи 227 получаем

$$\frac{a}{x^2}+bx^2\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x^2}\cdot bx^2}=2\sqrt{ab},$$

т. е.

$$\frac{a+bx^4}{x^2}\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

238. Известно, что (см. задачу 227)

$$\frac{m+n}{2}\geqslant\sqrt{mn}. \qquad (1)$$

Прологарифмируем обе части неравенства (1) по основанию a. Так как $a>1$, то знак неравенства сохранится.

Имеем

$$\log_a\frac{m+n}{2}\geqslant\frac{\log_a m+\log_a n}{2},$$

что и требовалось доказать.

239. В силу задачи 227 имеем

$$1+a_1\geqslant 2\cdot\sqrt{1\cdot a_1},$$
$$1+a_2\geqslant 2\cdot\sqrt{1\cdot a_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$1+a_n\geqslant 2\cdot\sqrt{1\cdot a_n}.$$

Перемножая почленно эти n неравенств, получаем

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n\cdot\sqrt{a_1a_2a_3\ldots a_n}. \qquad (1)$$

Но так как $a_1\cdot a_2\cdot a_3\ldots a_n=1$, то из (1) следует

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n.$$

240. Так как α и β удовлетворяют уравнению $ax+by=c$, то

$$a\alpha+b\beta=c.$$

Имеем (см. задачу 227)

$$\frac{c}{2}=\frac{a\alpha+b\beta}{2}\geqslant\sqrt{(a\alpha)(b\beta)}. \qquad (1)$$

Возведя обе части неравенства (1) в квадрат, получаем

$$\frac{c^2}{4}\geqslant a\alpha b\beta,$$

отсюда

$$\alpha\beta\leqslant\frac{c^2}{4ab}.$$

241. На основании задачи 227 имеем

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ a+c\geqslant 2\sqrt{ac},\ b+c\geqslant 2\sqrt{bc}. \qquad (1)$$

Так как по условию $a+b+c=1$, то

$$a+b=1-c,\ a+c=1-b,\ b+c=1-a.$$

Поэтому неравенства (1) принимают вид

$$1-c\geqslant 2\sqrt{ab},\ 1-b\geqslant 2\sqrt{ac},\ 1-a\geqslant 2\sqrt{bc}.$$

Перемножив эти три неравенства, получим

$$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc,$$

что и требовалось доказать.

242. Имеем (см. задачу 227)

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2},$$

$$\sqrt{a_1a_3}\leqslant\frac{a_1+a_3}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{a_{n-1}+a_n}{2}.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(n-1)a_1+(n-1)a_2+\ldots+(n-1)a_{n-1}+(n-1)a_n}{2},$$

или

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

243. Первое решение. Имеем (см. задачу 227)

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}. \qquad (1)$$

Введем обозначения

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\sqrt{ab},$$

тогда неравенство (1) принимает вид

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{ab}},$$

или

$$a+b+2\sqrt{ab}\geqslant 4\sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}},$$

или

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geqslant 4\sqrt{\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}}. \qquad (2)$$

Возведя обе части неравенства (2) в четвертую степень, получим

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 64ab\,(a+b)^2,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Рассмотрим очевидное неравенство

$$(a+b-2\sqrt{ab})^2 \geqslant 0. \qquad (1)$$

Преобразуем неравенство (1) в равносильные ему неравенства

$$(a+b)^2-4\sqrt{ab}(a+b)+4ab \geqslant 0,$$
$$(a+b)^2+4\sqrt{ab}(a+b)+4ab \geqslant 8\sqrt{ab}(a+b),$$
$$(a+b+2\sqrt{ab})^2 \geqslant 8\sqrt{ab}(a+b),$$
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4 \geqslant 8\sqrt{ab}(a+b). \qquad (2)$$

Возведя обе части неравенства (2) в квадрат, получим

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 64ab\,(a+b)^2.$$

244. Первое решение. Имеем

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2,$$

откуда

$$(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2),$$

или

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Введя обозначения

$$x=a+\frac{1}{a},\ y=b+\frac{1}{b}$$

и принимая во внимание задачу 227, имеем

$$\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} \geqslant \frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{4} =$$
$$= \frac{\left[(a+b)+\frac{a+b}{ab}\right]^2}{4} = \frac{\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2}{4}.$$

Итак,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2. \qquad (1)$$

Так как $a+b=1$ (постоянная величина), то среднее арифметическое a и b равно $\frac{1}{2}$. Поэтому среднее геометрическое не превосходит $\frac{1}{2}$, т. е. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}$ и $ab \leqslant \frac{1}{4}$. Отсюда $\frac{1}{ab} \geqslant 4$.

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}(1+4)^2=\frac{25}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 12{,}5.$$

Второе решение. Пусть $a=\frac{1}{2}+x$, тогда согласно условию $b=\frac{1}{2}-x$, где $|x|<\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$a+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}+x+\frac{1}{\frac{1}{2}+x} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}+x+4\cdot\frac{\frac{1}{4}-x^2}{\frac{1}{2}+x}=\frac{1}{2}+x+4\left(\frac{1}{2}-x\right)=2{,}5-3x,$$

$$b+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}-x+\frac{1}{\frac{1}{2}-x} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}-x+4\cdot\frac{\frac{1}{4}-x^2}{\frac{1}{2}-x}=\frac{1}{2}-x+4\left(\frac{1}{2}+x\right)=2{,}5+3x.$$

Поэтому

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant (2{,}5-3x)^2+(2{,}5+3x)^2=12{,}5+18x^2. \qquad (1)$$

Из (1) видно, что только при $x=0$, т. е. при $a=b=\frac{1}{2}$, имеем

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=12{,}5,$$

а при $a \neq b$ имеем

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2>12{,}5.$$

245. Имеем

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=1,$$

откуда

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3. \qquad (1)$$

Знак равенства в (1) имеет место лишь при $a=b=c$.

246. Первое решение. Имеем

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}. \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}$, то

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant\frac{3}{a+b+c}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

Второе решение. Имеем

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+$$
$$+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant 3+2+2+2=9,$$

так как

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2,\ \frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}.$$

247. Первое решение. Известно, что среднее геометрическое не больше среднего арифметического

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}\ \text{ и }\ \frac{ab+ac+bc}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Отсюда

$$3\sqrt[3]{abc}\leqslant a+b+c \qquad (1)$$

и

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leqslant ab+bc+ca. \qquad (2)$$

Перемножив неравенства (1) и (2), получим

$$9abc\leqslant(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

или, учитывая тождество

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc,$$

имеем

$$9abc\leqslant(a+b)(b+c)(c+a)+abc,$$

или

$$8abc\leqslant(a+b)(b+c)(c+a).$$

Второе решение. Имеем

$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b,$$
$$2\sqrt{bc} \leqslant b+c,$$
$$2\sqrt{ca} \leqslant c+a.$$

Перемножив эти неравенства, получим

$$8\sqrt{a^2b^2c^2} \leqslant (a+b)(b+c)(c+a),$$

или

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a).$$

248. Пусть

$$b+c=2x,$$
$$c+a=2y,$$
$$a+b=2z.$$

Тогда $a+b+c=x+y+z$; $a=y+z-x$; $b=x+z-y$; $c=x+y-z$. Имеем

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3\right]\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}.$$

249. Имеем

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

или

$$a+b+c\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}. \qquad (1)$$

Умножив почленно неравенство (1) на очевидное неравенство

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant 3\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}},$$

получим

$$a+b+c\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{2},$$

что и требовалось доказать.

250. Имеем

$$M=\frac{(x+y+z)^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2}{3}=$$
$$=\frac{9a^2+(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2}{3}.$$

Ясно, что M принимает наименьшее значение одновременно с суммой

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2.$$

Но эта сумма неотрицательна, следовательно, ее наименьшее значение равно нулю и достигается при $x=y=z$.

Так как $x+y+z=3a$, то $x=y=z=a$.

Итак, наименьшее значение

$$M=x^2+y^2+z^2=3a^2.$$

Отв. Наименьшее значение $M=3a^2$.

251. Так как среднее геометрическое n чисел не превосходит их среднего арифметического (см. задачу 230), то

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

Возведя обе части этого неравенства в n-ю степень, получим

$$n!\leqslant\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Заметим, что равенство получается только при $n=1$. При $n>1$

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

252. Имеем (см. задачу 230)

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{a\cdot\underbrace{b\cdot b\ldots b}_{n\text{ раз}}}\leqslant\frac{\overbrace{a+b+b+\ldots+b}^{n\text{ слагаемых}}}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}.$$

Равенство имеет место только при $a=b$.

253. Первое решение. Имеем (см. задачу 230)

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

и

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_3}\ldots\frac{1}{a_n}}.$$

Перемножая эти два неравенства, получаем

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2\sqrt[n]{1}=n^2.$$

Второе решение. Имеем

$$y=(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$=n+\left[\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right].$$

В квадратных скобках содержится $\frac{n(n-1)}{2}$ сумм взаимно обратных чисел

$$\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\geqslant 2 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Поэтому $y\geqslant n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2$.

254. Имеем

$$\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}<\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n},$$

а

$$\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}<\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n}.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)\,2n}<\frac{[1+3+5+\ldots+(2n-1)][2+4+6+\ldots+2n]}{n^2}.$$

Но так как

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \quad \text{и} \quad 2+4+6+\ldots+2n=n(n+1),$$

то

$$\sqrt[n]{(2n)!}<\frac{n^2[n(n+1)]}{n^2},$$

или

$$\sqrt[n]{(2n)!}<n(n+1).$$

Возведя обе части последнего неравенства в n-ю степень, получим

$$(2n)!<[n(n+1)]^n.$$

255. Имеем

$$\frac{a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m}{n}\geqslant\sqrt[n]{(a_1a_2a_3\ldots a_n)^m}$$

и

$$\frac{a_1^{n-m}+a_2^{n-m}+a_3^{n-m}+\ldots+a_n^{n-m}}{n}\geqslant\sqrt[n]{(a_1a_2a_3\ldots a_n)^{n-m}}.$$

Перемножая эти два неравенства, получим

$$\frac{\left(a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m\right)\left(a_1^{n-m}+a_2^{n-m}+a_3^{n-m}+\ldots+a_n^{n-m}\right)}{n^2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n]{(a_1a_2a_3\ldots a_n)^n},$$

или

$$\frac{\left(a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m\right)\left(a_1^{n-m}+a_2^{n-m}+a_3^{n-m}+\ldots+a_n^{n-m}\right)}{n^2}\geqslant$$

$$\geqslant a_1a_2a_3\ldots a_n,$$

откуда

$$\left(a_1^m+a_2^m+a_3^m+\ldots+a_n^m\right)\left(a_1^{n-m}+a_2^{n-m}+\ldots+a_n^{n-m}\right)\geqslant$$

$$\geqslant n^2\cdot a_1a_2a_3\ldots a_n.$$

256. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots$$

Поскольку ненаписанные члены правой части этого равенства положительны, то

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda.$$

257. Первое решение. Заменим в неравенстве Бернулли (см. задачу 256) $1+\lambda$ на $\sqrt[n]{\alpha}$, получим

$$1 + n\left(\sqrt[n]{\alpha} - 1\right) < \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha,$$

или

$$n\sqrt[n]{\alpha} - n < \alpha - 1.$$

Поделив обе части последнего неравенства на n, получим

$$\sqrt[n]{\alpha} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}.$$

Второе решение. Имеем

$$\sqrt[n]{\alpha} - 1 = \frac{\alpha - 1}{\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{n-2} + \ldots + 1}. \qquad (1)$$

Поскольку в знаменателе правой части этого равенства все слагаемые, кроме последнего, больше единицы, а число слагаемых равно n, то

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{n-2} + \ldots + 1 > \overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{n \text{ раз}} = n. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sqrt[n]{\alpha} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}.$$

258. В первый раз на левой чашке груз в x *кг* уравновешивался разновесом в 1 *кг*, во второй раз разновес в 1 *кг*, находившийся на левой чашке, уравновешивал груз в y *кг*. Отсюда имеем

$$x : 1 = 1 : y,$$

или

$$y = \frac{1}{x}.$$

Итак, было отпущено $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ *кг* товара вместо 2 *кг*. Но так как $x > 0$ и $x \neq 1$, то $x + \frac{1}{x} > 2$ (см. задачу 214) и ясно, что торговец потерпел убыток.

259. Применяя формулу бинома Ньютона, имеем

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + C_n^3 \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Это равенство можно переписать так:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{\frac{n(n-1)}{n^2}}{2!}+\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}{3!}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{n^k}}{k!}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-2)]}{n^{n-1}}}{(n-1)!}+$$
$$+\frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n^n}}{n!},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{4!}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)}{(n-1)!}+$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}. \quad (1)$$

Так как все слагаемые в правой части положительны, то

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$$

(равенство только при $n=1$).

С другой стороны, из формулы (1) видно, что при $n \geqslant 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}.$$

При $n \geqslant 3$ имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^{n-3}},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-3}}\right]. \quad (2)$$

Заметим, что в неравенстве (2) выражение, заключенное в квадратные скобки, есть сумма членов геометрической прогрессии. Поэтому неравенство (2) принимает вид

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{n-3}}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-3}}\right). \quad (3)$$

Усиливая еще раз неравенство (3), получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4}=2{,}75.$$

Это неравенство выведено для $n \geqslant 3$, но оно справедливо также при $n=1$ и $n=2$.

Итак, для любых натуральных n

$$2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2{,}75.$$

При $n \neq 1$ имеем

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2{,}75.$$

260. Заданное неравенство равносильно таким:

$$x^3-x^2-4x^2+4x+4x-4>0,$$
$$x^2(x-1)-4x(x-1)+4(x-1)>0,$$
$$(x-1)(x^2-4x+4)>0,$$
$$(x-1)(x-2)^2>0.$$

Так как $(x-2)^2>0$ при любом $x \neq 2$, то должно быть $x-1>0$ и $x \neq 2$.

Отв. $1<x<2$ или $x>2$.

261. Преобразуем тождественно левую часть заданного неравенства, получим равносильные неравенства

$$[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+1{,}001>0,$$
$$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1{,}001>0,$$
$$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+25{,}001>0,$$
$$[(x^2-5x)+5]^2+0{,}001>0. \qquad (1)$$

Неравенство (1) справедливо при любом значении x.

Отв. x—любое действительное число.

262. Так как обе части неравенства положительны, то, возведя обе части в квадрат, получим равносильное неравенство

$$\frac{3x-1}{2-x}>1,$$

или

$$\frac{3x-1-2+x}{2-x}>0,$$

или

$$\frac{4x-3}{2-x}>0,$$

или

$$4\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-2)<0.$$

Корни левой части неравенства суть $\frac{3}{4}$ и 2, поэтому

$$\frac{3}{4}<x<2.$$

Отв. $\frac{3}{4}<x<2.$

263. Так как $5^{2x}>0$, то, разделив обе части неравенства на 5^{2x}, получим

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{5}\right)^{x}-2<0,$$

или

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{x}+1\right]\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{x}-2\right]<0.$$

Поскольку $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}+1>0$, то заданное неравенство эквивалентно такому:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x}-2<0,$$

или $(0{,}4)^x<2$, или $x>\log_{0,4}2$ (при основании, меньшем единицы, степень убывает с возрастанием показателя).

Отв. $x>\log_{0,4}2$.

264. По смыслу задачи $x>0$, поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_a x(x+1)<\log_a(2x+6).$$

Так как $a>1$, то отсюда $x(x+1)<2x+6$, или

$$x^2-x-6<0.$$

Решая это квадратное неравенство при условии $x>0$, получаем $0<x<3$.

Отв. $0<x<3$.

265. Так как $x>0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^{\log_a x}>a^2. \tag{1}$$

Но $a>1$, поэтому, логарифмируя неравенство (1) по основанию a, получим

$$\log_a^2 x>2.$$

Отсюда окончательно находим либо $\log_a x>\sqrt{2}$ и, следовательно, $x>a^{\sqrt{2}}$, либо $\log_a x<-\sqrt{2}$, и тогда $0<x<a^{-\sqrt{2}}$.

Отв. $0<x<a^{-\sqrt{2}}$ или $x>a^{\sqrt{2}}$.

266. Пусть $\log_2 x=y$, тогда $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}=\dfrac{1}{y}$.

Решаемое неравенство принимает вид

$$y+\frac{1}{y}+2\cos\alpha\leqslant 0. \tag{1}$$

Ясно, что $\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$ и y имеют одинаковый знак, и также известно, что $\left|y+\dfrac{1}{y}\right|\geqslant 2$.

Поэтому, если $y+\dfrac{1}{y}>0$, то неравенство (1) выполняется только тогда, когда $y+\dfrac{1}{y}=2$ и $\cos\alpha=-1$.

Итак, если $x=2$ и $\alpha=(2k+1)\pi$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, то в неравенстве (1) имеет место знак равенства.

Если же $y+\dfrac{1}{y}<0$, т. е. $y<0$, то $y+\dfrac{1}{y}\leqslant -2$ и неравенство (1) имеет место при любых значениях α.

Итак, заданное неравенство имеет место при $0<x<1$ и всех значениях α.

Отв. Заданное неравенство выполняется при $x=2$ и $\alpha=(2k+1)\pi$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, или при $0<x<1$ и при всех значениях α.

267. Пользуясь логарифмическим тождеством $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, преобразуем левую часть данного неравенства так:

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 x = \log_3 x \left(\log_{\frac{1}{2}} 3 + 1\right) =$$

$$= \log_3 x \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} = \frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}} = -\frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} 2}.$$

Данное неравенство примет тогда вид

$$-\frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} 2} > 1. \qquad (1)$$

Так как $2 > 1$, $\frac{3}{2} > 1$ и $\log_{\frac{3}{2}} 2 > 0$, то неравенство (1) эквивалентно такому:

$$\log_3 x < -\log_{\frac{3}{2}} 2.$$

Учитывая, что по условию $x > 0$, получаем

$$0 < x < 3^{-\log_{\frac{3}{2}} 2}.$$

Ответ. $0 < x < 3^{-\log_{\frac{3}{2}} 2}$.

268. Имеем

$$\frac{\lg^2 x + 2\lg x - 6}{\lg x} - 1 < 0,$$

или

$$\frac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} < 0,$$

которое равносильно неравенству

$$\lg x\,(\lg^2 x + \lg x - 6) < 0 \qquad (\lg x \neq 0),$$

или

$$\lg x\,(\lg x + 3)(\lg x - 2) < 0,$$

откуда

$$0 < \lg x < 2 \quad \text{или} \quad \lg x < -3.$$

Ответ. $1 < x < 100$ или $0 < x < 0{,}001$.

269. Функция $\arcsin a$ определена при $|a| \leqslant 1$ и положительна при $a > 0$. Поэтому данное неравенство эквивалентно такому:

$$0 < \lg_{10} x \leqslant 1, \quad \text{или} \quad \lg_{10} 1 < \lg_{10} x \leqslant \lg_{10} 10.$$

Так как при одном и том же основании, большем единицы, большему числу соответствует больший логарифм, то имеем:

$$1 < x \leqslant 10.$$

270. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2+(x+a)^2+2x \leqslant 1, \\ y=x+a. \end{cases}$$

Неравенство

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1 \leqslant 0$$

имеет единственное решение относительно x тогда и только тогда, когда

$$(a+1)^2-2(a^2-1)=0,$$

т. е.

$$a^2-2a-3=0;$$

отсюда

$$a_1=3, \qquad a_2=-1.$$

Итак, если $a=3$, то $x^2+4x+4=0$ и $x=-2$, $y=1$, а если $a=-1$, то $x^2=0$ и $x=0$, $y=-1$.

Отв. $a=3$, $x=-2$, $y=1$ или $a=-1$, $x=0$, $y=-1$.

271. Заметим, что $x^2-x+1>0$ при всех значениях x, так как дискриминант квадратного трехчлена равен $-3<0$ и, следовательно, корни трехчлена невещественны, поэтому можно умножить оба неравенства на знаменатель. В результате получим

$$\begin{cases} -3x^2+3x-3 < x^2+ax-2, \\ x^2+ax-2 < 2x^2-2x+2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4x^2+(a-3)x+1>0, \\ x^2-(a+2)x+4>0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы справедливо при всех x тогда и только тогда, когда

$$(a-3)^2-16<0. \tag{1}$$

Второе неравенство выполняется при условии

$$(a+2)^2-16<0. \tag{2}$$

Решая теперь совместно (1) и (2) относительно a, получаем

$$\begin{cases} -4<a-3<4, \\ -4<a+2<4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1<a<7, \\ -6<a<2. \end{cases}$$

Отв. $-1<a<2$.

Глава V

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

272. Пусть промежуток времени следования трамваев в минутах x, скорость трамвая v_1, скорость пешехода v_2 (v_1 и v_2—пути, пройденные в 1 минуту).

Если пешеход идет навстречу трамваю, то за 4 минуты их суммарный путь равен $4(v_1+v_2)$. Этот суммарный путь равен расстоянию v_1x между трамваями.

Итак, имеем уравнение

$$4(v_1+v_2)=v_1x. \tag{1}$$

Если же пешеход и трамвай движутся в одном направлении, то через каждые 12 минут трамвай обгоняет пешехода, следовательно, разность их путей будет равна $12(v_1-v_2)$. Эта разность равна также расстоянию между трамваями v_1x, т. е.

$$12(v_1-v_2)=v_1x. \tag{2}$$

Решая (1) и (2) совместно, находим x.

Отв. 6 мин.

273. Пароход, вышедший из A, встретит, во-первых, те вышедшие из B пароходы, которые уже находятся в пути к моменту выхода парохода из A, и, во-вторых, те, которые выйдут из B за время движения парохода, вышедшего из A. В момент выхода парохода из A в пути находятся 12 пароходов, считая тот, который вышел в этот момент из B (но не считая того, который в этот момент прибыл в A). Кроме того, за 12 суток пути парохода, вышедшего из A, из B выйдет 11 пароходов (не считая того, который выйдет из B в момент прибытия парохода из A). Итак, в открытом море каждый пароход встретит $12+11=23$ парохода.

Отв. 23 парохода.

274. Обозначим через x *км/час* скорость катера в стоячей воде, а через y *км/час* скорость течения, тогда имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{96}{x+y}+\dfrac{96}{x-y}=14, \\ \dfrac{24}{y}=\dfrac{96}{x+y}+\dfrac{72}{x-y}. \end{cases}$$

Пусть $x=zy$, тогда второе уравнение системы примет вид

$$\frac{24}{y}=\frac{96}{y(z+1)}+\frac{72}{y(z-1)},$$

или

$$z^2-7z=0.$$

Так как $z \neq 0$, то $z=7$. Поэтому $x=7y$. Подставив $x=7y$ в первое уравнение системы, находим

$$\frac{96}{8y}+\frac{96}{6y}=14.$$

К этому уравнению проще прийти, исходя из следующих соображений.

Считая плот неподвижным (например, для наблюдателя, находящегося на плоту), находим, что катер плыл вниз столько же часов, сколько обратно до встречи с плотом, так как скорость движения катера относительно плота одинакова в обоих случаях. Следовательно, катер проплыл 96 *км* за время, в течение которого плот проплыл 24 *км* : 2 = 12 *км*. Поэтому, если y *км/час* — скорость течения, то скорость катера по течению равна $\frac{96}{12}y$ *км/час* = $=8y$ *км/час*; тогда скорость катера против течения равна $6y$ *км/час*.

Значит,

$$\frac{96}{8y}+\frac{96}{6y}=14;$$

отсюда $y=2$ *км/час* — скорость течения; $7y=14$ *км/час* — скорость катера в стоячей воде.

Отв. Скорость течения 2 *км/час*, скорость катера в стоячей воде 14 *км/час*.

275. Обозначив расстояние AB через S, время движения от A до B — через x часов и время движения от B к A — через y часов, имеем

$$S=v_1x=v_2y.$$

Отсюда

$$x=\frac{v_2y}{v_1}=\frac{30y}{40}=\frac{3y}{4}.$$

Средняя скорость

$$\frac{2S}{x+y}=\frac{60y}{\frac{3}{4}y+y}\approx 34{,}3 \text{ } км/час.$$

Замечание. Часто на вопрос этой задачи отвечают, что средняя скорость равна 35 *км* в час. Но это неверно. Так было бы, если бы автомобиль двигался одинаковые промежутки времени с каждой из скоростей.

Отв. $\approx 34{,}3$ *км/час*.

276. Пусть расстояние между A и B равно l, а скорости мотоциклов v_1 и v_2. За время t первый мотоцикл проехал путь, равный $p+l-q$, а второй — путь $q+l-p$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{l+p-q}{t},\\ v_2&=\frac{l+q-p}{t}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

С другой стороны, отношение скоростей равно отношению путей, пройденных до первой встречи, т. е.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{l-p}{p}. \qquad (2)$$

Подставив в (2) значения v_1 и v_2 из (1), получим уравнение для определения l. Решив его, найдем $l=3p-q$. Подставив это значение l в формулы (1), получим

$$v_1=\frac{4p-2q}{t}, \qquad v_2=\frac{2p}{t}.$$

Ответ. $l=3p-q$, $v_1=\frac{4p-2q}{t}$, $v_2=\frac{2p}{t}$.

277. Введем обозначения: скорость первого тела x *м/мин*, а скорость второго тела y *м/мин*. Для определенности пусть скорость первого тела больше скорости второго тела. Положим, что когда тела движутся в одном направлении, они сходятся в некоторой точке A окружности, а ближайшая точка встречи — B.

На пути от A до B второе тело отстает от первого, и в момент, когда они впервые сходятся, отставание составляет длину полной окружности. Поскольку между двумя ближайшими соединениями тел протекает 56 минут, за которые первое тело проходит $56x$ *м*, а второе $56y$ *м*, то длина окружности равна $(56x-56y)$ *м*.

Если же тела движутся в противоположных направлениях, то пути, пройденные ими за 8 минут, протекающие между двумя ближайшими встречами, в сумме составляют длину окружности. Значит, длина окружности равна $8x+8y$.

Итак, имеем уравнение

$$56(x-y)=8(x+y). \qquad (1)$$

Согласно условию задачи за 24 *сек* $\left(\frac{2}{5}\ мин\right)$ тела сближаются на 40 *м* — 26 *м* = 14 *м*. Поэтому

$$\frac{2}{5}(x+y)=14. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, находим

$$x=20\ м/мин, \qquad y=15\ м/мин$$

Длина окружности

$$8(x+y)=8(20+15)=280.$$

Ответ. 280 *м*.

278. Обозначим через t_1 время, прошедшее до первой встречи, через t_2 — время, прошедшее до второй встречи, а через l — длину окружности.

За время t_1 первое тело прошло путь vt_1, а второе — путь $\frac{at_1^2}{2}$. Согласно первому утверждению задачи имеем

$$vt_1+\frac{at_1^2}{2}=l. \qquad (1)$$

За время t_2 каждое тело прошло один и тот же путь l (полную окружность).

Следовательно,

$$vt_2 = l \quad \text{и} \quad \frac{at_2^2}{2} = l.$$

Из последних двух уравнений находим

$$l = \frac{2v^2}{a}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$t_1 = (\sqrt{5} - 1)\frac{v}{a}.$$

279. Если обозначим скорость первого автомобиля через x *км/час*, то до встречи первый автомобиль пройдет путь в tx *км*, а второй $(S - tx)$ *км*. Следовательно, скорость второго автомобиля равна $\frac{S - tx}{t}$ *км/час*. Время, нужное первому автомобилю для прохождения пути в p *км*, составляет $\frac{p}{x}$ часов, а время, необходимое второму, — $\frac{pt}{S - tx}$ часов.

Согласно условию задачи имеем

$$\frac{p}{x} - \frac{pt}{S - tx} = q.$$

Решая это уравнение, получаем

$$x = \frac{2pt + qS \pm \sqrt{4p^2t^2 + q^2S^2}}{2qt}.$$

Отв. Скорость первого автомобиля $\frac{2pt + qS - \sqrt{4p^2t^2 + q^2S^2}}{2qt}$ *км/час*, скорость второго $\frac{qS - 2pt + \sqrt{4p^2t^2 + q^2S^2}}{2qt}$ *км/час*.

280. Обозначим расстояние в километрах между A и B через x. Велосипедист прошел это расстояние за $\frac{x}{v}$ часов, а мотоциклист за $\frac{x}{4v}$ часов. Известно, что велосипедист прибыл в B на t часов позже, чем мотоциклист, и, кроме того, он еще до выезда мотоциклиста был в пути $\frac{S}{v}$ часов. Следовательно, велосипедист был

в пути на $\left(t+\frac{S}{v}\right)$ часов больше, чем мотоциклист. Таким образом,

$$\frac{x}{v}-\frac{x}{4v}=t+\frac{S}{v}.$$

Отв. $\frac{4}{3}(vt+S)$ *км.*

281. Пусть t часов — искомое время. За единицу длины примем путь, который проходит лодка за 1 час в стоячей воде. Тогда скорость лодки в стоячей воде равна 1 *ед/час*. Скорость течения обозначим через q *ед/час*. Ясно, что скорость лодки, плывущей по течению, равна $(1+q)$ *ед/час*, а плывущей против течения $(1-q)$ *ед/час*. Пусть $AB=a$ (*ед*), $BC=b$ (*ед*).

Из условия задачи следует система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a}{1}+\frac{b}{1+q}=6, \\ \frac{a}{1}+\frac{b}{1-q}=7, \\ \frac{a+b}{1+q}=5{,}5, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \frac{a+b+aq}{1+q}=6, \\ \frac{a+b-aq}{1-q}=7, \\ \frac{a+b}{1+q}=5{,}5. \end{cases} \qquad (1)$$

Из первого и третьего уравнений системы (1) имеем

$$\frac{a+b-aq}{1+q}=2\cdot 5{,}5-6=5. \qquad (2)$$

Из второго уравнения системы (1) получаем

$$\frac{1-q}{a+b-aq}=\frac{1}{7}. \qquad (3)$$

Из третьего уравнения системы (1) следует

$$\frac{1+q}{a+b}=\frac{1}{5{,}5}=\frac{2}{11}. \qquad (4)$$

Перемножая почленно уравнения (2), (3) и (4), находим

$$\frac{1-q}{a+b}=\frac{10}{77}.$$

Искомая величина

$$t=\frac{a+b}{1-q}=\frac{77}{10}=7{,}7.$$

Отв. 7,7 часа.

282. Пусть в момент выхода автомобиля пешеход находился в пункте A_1 (рис. 3), а велосипедист — в пункте B_1.

Введем обозначения: пусть $4t$ — время движения пешехода (и велосипедиста) до встречи в пункте C. Следовательно, $3t$ — время движения пешехода (и велосипедиста) до момента выхода автомобиля из A, а t — время движения автомобиля до встречи с велосипедистом и пешеходом.

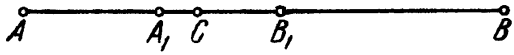

Рис. 3.

Если скорость пешехода принять равной 1 *ед. дл./ед. вр.*, то скорость автомобиля 4 *ед. дл./ед. вр.*

Скорость велосипедиста обозначим через x *ед. дл./ед. вр.* Учитывая, что путь $CA=4t$ *ед. дл.* пройден велосипедистом за то же время, что и путь $CB=4tx$ пройден автомобилем, имеем

$$\frac{4t}{x}=\frac{4tx}{4},$$

откуда

$$x^2=4, \quad x=2.$$

Отв. Скорость велосипедиста больше скорости пешехода в два раза.

283. Пусть второй пароход шел вперед $2t$ суток со скоростью v *км/сутки*. Тогда первый пароход прошел первую половину пути за t суток со скоростью v *км/сутки*, а вторую половину пути за $(t+2)$ суток со скоростью $(v-240)$ *км/сутки*.

Следовательно,

$$\frac{v}{v-240}=\frac{t+2}{t}.$$

Составляем производную пропорцию

$$\frac{v}{v-v+240}=\frac{t+2}{t+2-t}, \quad \text{или} \quad \frac{v}{240}=\frac{t+2}{2}. \tag{1}$$

Из последней части условия задачи имеем $(v+240)\cdot 6=2vt$, или $\frac{v+240}{v}=\frac{t}{3}$, или $\frac{v}{v+240}=\frac{3}{t}$. Составим производную пропорцию

$$\frac{v}{v+240-v}=\frac{3}{t-3}, \text{ или } \frac{v}{240}=\frac{3}{t-3}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{t+2}{2}=\frac{3}{t-3}$$

или

$$t^2-t-12=0.$$

Положительный корень этого уравнения равен 4.

Отв. 8 суток.

284. Обозначим скорость вестового через x *км/час*. Относительная скорость вестового при движении его из конца колонны в начало равна $(x-v)$ *км/час*, при движении обратно — $(x+v)$ *км/час*. Время движения вестового вперед равно $\frac{d}{x-v}$ часов; время движения назад $\frac{d}{x+v}$ часов.

Согласно условию задачи имеем

$$\frac{d}{x-v}+\frac{d}{x+v}=\frac{t}{60}.$$

Отв. $\frac{60d+\sqrt{3600d^2+t^2v^2}}{t}$ *км/час*.

285. Обозначим скорость движения поезда через x *км/час*, время движения пассажира на такси — y часов, а время, которое пассажир затратил, чтобы догнать поезд, — z часов. Таким образом, поезд к моменту, когда его догнал пассажир, прошел путь

$$(t+z)\,x \text{ км}.$$

Пассажир проехал на такси путь yv_1 *км*, а на автобусе $(z-y)\,v_2$ *км*.

Итак,

$$(t+z)\,x=yv_1+(z-y)\,v_2. \qquad (1)$$

Если бы пассажир догонял поезд только на такси, то к моменту, когда пассажир догнал бы его, поезд прошел бы расстояние $(t+z-\tau)\,x$ *км*, а пассажир $(z-\tau)\,v_1$ *км*.

Следовательно,

$$(t+z-\tau)\,x=(z-\tau)\,v_1. \qquad (2)$$

В действительности было затрачено денег (yv_1a+A) рублей, а если бы пассажир догонял поезд только на такси, то он истратил бы $(z-\tau)\,v_1a$.

Согласно условию задачи имеем

$$yv_1a+A=(z-\tau)\,v_1a+B. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1), (2) и (3), находим скорость поезда

$$x=v_2+\frac{(A-B)\,(v_2-v_1)}{av_1\tau} \text{ км/час}.$$

Отв. $v_2+\frac{(A-B)\,(v_2-v_1)}{av_1\tau}$ *км/час*.

286. Поскольку оба туриста прибыли в пункт B одновременно, то они, двигаясь пешком, прошли одно и то же расстояние. Обозначим это расстояние через x, а искомое время y. Время, за которое второй турист прошел пешком x *км* со скоростью v_1 *км/час*, равно времени, за которое мотоцикл проехал путь $(2S-3x)$ *км* со скоростью v_2 *км/час*. Таким образом, имеем

$$\frac{x}{v_1}=\frac{2S-3x}{v_2}. \qquad (1)$$

Так как каждый из туристов прошел пешком x *км* и ехал на мотоцикле $(S-x)$ *км*, то искомое время

$$y=\frac{x}{v_1}+\frac{S-x}{v_2}. \qquad (2)$$

Из (1) находим $x=\frac{2Sv_1}{v_2+3v_1}$ *км*.

Подставляя значение x в (2), получаем $y=\frac{S(3v_2+v_1)}{v_2(3v_1+v_2)}$ часов.

Отв. $\frac{S(3v_2+v_1)}{v_2(3v_1+v_2)}$ *час*.

287. Обозначим расстояние от A до B через x *км*, скорость первого пешехода через y *км/час*, скорость второго — z *км/час*.

К моменту первой встречи первый пешеход прошел путь, равный $(x+d)$ *км*, затратив на это $\frac{x+d}{y}$ *час*, а второй прошел путь $(x-d)$ *км*, затратив $\frac{x-d}{z}$ *час*. Поскольку они вышли одновременно, то

$$\frac{x+d}{y}=\frac{x-d}{z}. \qquad (1)$$

К моменту второй встречи первый пешеход прошел путь, равный $\left(2x+\frac{x}{n}\right)$ *км*, а второй $\left(2x-\frac{x}{n}\right)$ *км*, следовательно,

$$\frac{2x+\frac{x}{n}}{y}=\frac{2x-\frac{x}{n}}{z}.$$

Из уравнения (1) получаем

$$\frac{y}{z}=\frac{x+d}{x-d},$$

а из уравнения (2) имеем

$$\frac{y}{z}=\frac{2n+1}{2n-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{x+d}{x-d}=\frac{2n+1}{2n-1}.$$

Составляем производную пропорцию

$$\frac{x+d+x-d}{x+d-x+d}=\frac{2n+1+2n-1}{2n+1-2n+1}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{d}=2n,$$

откуда

$$x=2dn.$$

Отв. $2dn$ *км*.

288. Пусть мотоциклист проезжает путь AB за x часов, тогда велосипедист проезжает это расстояние за $(x+t)$ часов.

За 1 час мотоциклист проходит $\frac{1}{x}AB$, а велосипедист $\frac{1}{x+t}AB$. Вместе они проезжают за 1 час путь, равный $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+t}\right)AB$, а за n часов — путь, равный $n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+t}\right)AB=AB$. Таким образом,

$$n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+t}\right)=1,$$

или

$$x^2-(2n-t)\,x-nt=0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень, так как произведение корней $(-nt)$ отрицательно. Положительный корень

$$x=\frac{2n-t+\sqrt{4n^2+t^2}}{2}.$$

Отв. Велосипедист проезжает путь AB за $\frac{2n+t+\sqrt{4n^2+t^2}}{2}$ *час*, а мотоциклист за $\frac{2n-t+\sqrt{4n^2+t^2}}{2}$ *час*.

289. Обозначим меньшую скорость вестового через x *км/час*, тогда бо́льшая скорость равна $(x+1)$ *км/час*.

Согласно условию задачи имеем

$$4\leqslant\frac{10}{x+1}+\frac{10}{x}\leqslant 5,$$

или

$$4x^2+4x\leqslant 20x+10\leqslant 5x^2+5x.$$

Таким образом, имеем систему неравенств

$$\left.\begin{aligned}x^2-3x-2&\geqslant 0,\\ 2x^2-8x-5&\leqslant 0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Из первого неравенства системы (1) находим

$$x\geqslant\frac{3+\sqrt{17}}{2}\quad\text{или}\quad x\leqslant\frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

Так как $x>0$, то отсюда следует, что

$$x\geqslant\frac{3+\sqrt{17}}{2}.\qquad(2)$$

Из второго неравенства системы (1) получаем

$$\frac{4-\sqrt{26}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{4+\sqrt{26}}{2}.$$

Поскольку $x > 0$, то

$$0 < x \leqslant \frac{4+\sqrt{26}}{2}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{4+\sqrt{26}}{2}.$$

290. Обозначим число процентов прироста продукции за год через x. Если к началу первого года величина продукции была a, то к началу второго года стала

$$a_1 = a + \frac{ax}{100} = a\left(1+\frac{x}{100}\right),$$

а к началу третьего года

$$a_2 = a_1\left(1+\frac{x}{100}\right) = a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$$

и т. д. Очевидно, что к началу восьмого года количество продукции стало $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^7$, а к концу восьмого года $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^8$.

Рассуждая аналогично при приросте продукции в год на $(x+p)$ %, получаем, что количество продукции к концу восьмого года равно $a\left(1+\frac{x+p}{100}\right)^8$.

Согласно условию задачи имеем

$$a\left(1+\frac{x+p}{100}\right)^8 = 2a\left(1+\frac{x}{100}\right)^8,$$

или

$$\left(1+\frac{x+p}{100}\right)^8 = \left[\sqrt[8]{2}\left(1+\frac{x}{100}\right)\right]^8,$$

или

$$1+\frac{x+p}{100} = \sqrt[8]{2}\left(1+\frac{x}{100}\right),$$

откуда

$$x = \frac{p-100\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\sqrt[8]{2}-1}.$$

Заметим, что задача имеет решение только, если

$$p > 100\left(\sqrt[8]{2}-1\right).$$

Отв. $\frac{p-100\left(\sqrt[8]{2}-1\right)}{\sqrt[8]{2}-1}$, где $p > 100\left(\sqrt[8]{2}-1\right)$.

291. Первое решение. Обозначим искомое число досок через x. В первые два часа мастер выиграл $\frac{xp}{100}$ партий и l партий проиграл. Следующие два часа он уже вел игру на $\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)$ досках. Из всех партий, сыгранных в последние два часа, он выиграл $\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\frac{q}{100}$ партий, m партий проиграл и n свел вничью. Так как общее число партий, сыгранных за последние два часа, составляется из всех выигранных, проигранных и сведенных вничью партий за эти часы, то отсюда получаем уравнение

$$x-\frac{xp}{100}-l=\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\frac{q}{100}+m+n,$$

или

$$\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)\left(1-\frac{q}{100}\right)=m+n,$$

или

$$x-\frac{xp}{100}-l=\frac{100\,(m+n)}{100-q},$$

или

$$x\left(1-\frac{p}{100}\right)=\frac{100\,(m+n)}{100-q}+l,$$

или

$$x\cdot\frac{100-p}{100}=\frac{100\,(m+n)+l\,(100-q)}{100-q},$$

откуда

$$x=\frac{10\,000\,(m+n)+100l\,(100-q)}{(100-p)\,(100-q)}.$$

Второе решение. За последние два часа мастер сыграл $\left(x-\frac{xp}{100}-l\right)$ партий, $(m+n)$ партий составляют $(100-q)$ % партий, сыгранных за последние два часа, т. е.

$$m+n=\frac{100-q}{100}\left(x-\frac{xp}{100}-l\right).$$

Следовательно,

$$10\,000\,(m+n)=(100-q)\,(100-p)\,x-100l\,(100-q),$$

откуда

$$x=\frac{10\,000\,(m+n)+100l\,(100-q)}{(100-q)\,(100-p)}.$$

292. При каждой операции вливания в сосуд поступало $\frac{ap}{100}$ л спирта, а после каждой операции выливания в сосуде сохранялось $\frac{A}{A+a}$ того количества спирта, которое было в сосуде в момент, предшествующий этому выливанию.

Пусть x_1, x_2, x_3, ..., x_n — количество спирта в сосуде соответственно после 1-го, 2-го, 3-го, ..., n-го выливания; тогда

$$x_1=\frac{ap}{100}\frac{A}{A+a},$$

$$x_2=\left(\frac{ap}{100}\frac{A}{A+a}+\frac{ap}{100}\right)\frac{A}{A+a},$$

$$x_3=\left[\frac{ap}{100}\left(\frac{A}{A+a}\right)^2+\frac{ap}{100}\frac{A}{A+a}+\frac{ap}{100}\right]\frac{A}{A+a},$$

. . . . . .

$$x_n=\frac{ap}{100}\left[\left(\frac{A}{A+a}\right)^{n-1}+\left(\frac{A}{A+a}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{A}{A+a}+1\right]\frac{A}{A+a}=$$

$$=\frac{ap}{100}\frac{1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n}{1-\frac{A}{A+a}}\frac{A}{A+a}=\frac{Aap}{100}\frac{1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n}{a}=\frac{Ap}{100}\left[1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\right].$$

Согласно условию $x_n\geqslant\frac{Aq}{100}$, следовательно,

$$\frac{Ap}{100}\left[1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\right]\geqslant\frac{Aq}{100}.$$

Далее,

$$1-\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\geqslant\frac{q}{p},\quad\left(\frac{A}{A+a}\right)^n\leqslant1-\frac{q}{p},\quad\left(\frac{A+a}{A}\right)^n\geqslant\frac{p}{p-q}.$$

Ясно, что задача имеет решение, если $p>q$.

Имеем

$$n\lg\left(\frac{A+a}{A}\right)\geqslant\lg\frac{p}{p-q}.$$

Отв. $n\geqslant\dfrac{\lg\frac{p}{p-q}}{\lg\frac{A+a}{A}}$.

293. Пусть в первый раз из бака вылили x литров спирта, после этого в баке осталось чистого спирта $(64-x)$ *л*. Следовательно, на 1 *л* смеси приходится $\frac{64-x}{64}$ *л* спирта. Значит, второй раз было отлито чистого спирта $\frac{64-x}{64}x$ *л*.

Таким образом, после второго отливания в баке осталось чистого спирта

$$64-x-\frac{64-x}{64}x=\frac{1}{64}(64-x)^2\ л.$$

Итак, имеем уравнение

$$\frac{1}{64}(64-x)^2=49,$$

откуда $\frac{64-x}{8}=7$.

Отв. Первый раз отлили 8 *л*, а второй раз — 7 *л* чистого спирта.

294. До переливания концентрация q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ спирта была равна:

в первом сосуде $q_1=1$,

во втором сосуде $q_2=\frac{1}{k}$,

. . . . . .

в n-м сосуде $q_n=\frac{1}{k^{n-1}}$.

Пусть после переливаний концентрации равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тогда $p_1=1$, а p_i при $i>1$ определяется из уравнения

$$p_i=\frac{q_i\frac{v}{2}+p_{i-1}\frac{v}{2}}{v}=\frac{q_i+p_{i-1}}{2} \qquad (i=2, \ldots, n).$$

Это уравнение мы получаем, деля количество спирта

$$q_i\frac{v}{2}+p_{i-1}\frac{v}{2},$$

которое оказывается в i-м сосуде после переливания из $(i-1)$-го сосуда, на объем всего сосуда v.

Таким образом,

$$p_2=\frac{q_2+p_1}{2}, \qquad p_3=\frac{q_3+p_2}{2}, \ \ldots, \ p_n=\frac{q_n+p_{n-1}}{2}.$$

Отсюда

$$p_n=\frac{q_n+p_{n-1}}{2}=\frac{q_n+\frac{q_{n-1}+p_{n-1}}{2}}{2}=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{1}{2^2}p_{n-2}=$$

$$=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{1}{2^2}\frac{q_{n-2}+p_{n-3}}{2}=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{q_{n-2}}{2^3}+\frac{p_{n-3}}{2^3}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\ldots+\frac{q_2}{2^{n-1}}+\frac{p_1}{2^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2k^{n-1}}+\frac{1}{2^2k^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}k}+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если $k \neq 2$, то

$$p_n = \frac{1}{2k} \frac{\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{k} - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1} - k^{n-1}}{(2k)^{n-1}(2-k)} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если же $k = 2$, то

$$p_n = \frac{n-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n+1}{2^n}.$$

295. Пусть объем второго чана равен 1 (единице объема), а объем первого чана равен x (единиц объема).

При открытых трубах A, B и C за 7 часов мог наполниться только второй чан, так как за 1 час в первом чане могло оказаться лишь $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} \neq \frac{x}{7}$ (единиц).

Труба A дает за 1 час $\frac{x}{3}$ (единиц объема) воды

(» B » » 1 » $\frac{x}{5}$ » » »

» C » » 1 » $\frac{x}{6}$ » » »

Следовательно, $\left(\frac{x}{5} - \frac{x}{6}\right) 7 = 1$; $x = 4\frac{2}{7}$ (единиц объема).

Отв. Первый чан больше второго в $4\frac{2}{7}$ раза.

296. Обозначим меньший из сомножителей через x. Тогда согласно условию задачи имеем

$$x(x+10) - 40 = 39x + 22,$$

или

$$x^2 - 29x - 62 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен 31.

Отв. Сомножители равны 31 и 41.

297. Пусть часы уходят вперед (спешат) на x минут в сутки. Следовательно, через $\frac{m}{x}$ суток часы покажут правильное время. Если бы они уходили вперед на $(x+t)$ минут в сутки, то при отставании в данный момент на n минут (по сравнению с правильным временем) они показали бы правильное время через $\frac{n}{x+t}$ суток.

Согласно условию задачи $\frac{m}{x}$ больше, чем $\frac{n}{x+t}$, на 1, поэтому имеем

$$\frac{m}{x} = 1 + \frac{n}{x+t}, \qquad \text{или } x^2 + (n+t-m)x - mt = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень, который служит решением задачи.

Отв. $x=\dfrac{m-n-t+\sqrt{m^2+n^2+t^2+2(mt+nt-mn)}}{2}$ *мин.*

298. Обозначим искомое число через x^2, число десятков и число тысяч через a, число единиц через b, число сотен через $(b+1)$.

Таким образом,

$$x^2=1000a+100(b+1)+10a+b,$$

или

$$x^2=1010a+101b+100,$$

или

$$(x-10)(x+10)=101(10a+b). \qquad (1)$$

Правая часть равенства (1) делится на 101, следовательно, и левая часть также кратна 101. Поскольку 101—простое число, то хотя бы один из сомножителей левой части должен делиться на 101.

Так как x^2—четырехзначное число, то x—двузначное, а следовательно, $x-10$ не может делиться на трехзначное число 101. Таким образом, только $x+10$ может делиться на 101, а поскольку $x+10\leqslant 109$, то $x+10=101$, следовательно, $x=91$; теперь можно определить искомое число

Отв. 8281.

299. Пусть первый слиток весит x *г*, тогда второй слиток весит $(m-x)$ *г*.

В первом слитке содержится чистого золота $\dfrac{px}{100}$, а во втором $\dfrac{q(m-x)}{100}$ *г*.

Согласно условию задачи в первом слитке содержится чистого золота на n *г* больше, чем во втором, следовательно,

$$\frac{px}{100}-\frac{q(m-x)}{100}=n,$$

или

$$(p+q)x=100n+qm.$$

Отв. Первый слиток весит $\dfrac{100n+qm}{p+q}$ *г*, а второй $\dfrac{pm-100n}{p+q}$ *г*.

300. Пусть второй кран действовал x дней. Первый кран за один день наполняет $\dfrac{m}{nt}$ чана. Если принять вместимость чана за единицу, то второй кран наполнил $1-\dfrac{m}{n}=\dfrac{n-m}{n}$ чана. Следовательно, за один день второй кран наполняет $\dfrac{n-m}{nx}$ чана.

Если бы оба крана действовали вместе $\frac{t+x}{2}$ дней, то они согласно условию задачи наполнили бы чан, поэтому

$$\left(\frac{m}{nt}+\frac{n-m}{nx}\right)\frac{t+x}{2}=1,$$

или

$$mx(t+x)-(m-n)\,t\,(t+x)=2ntx,$$

или

$$mx^2-tnx+t^2(n-m)=0.$$

Так как $n-m>0$, то оба корня положительные:

$$x=\frac{tn\pm\sqrt{t^2n^2-4t^2m(n-m)}}{2m}=\frac{tn\pm\sqrt{(tn-2tm)^2}}{2m}=$$

$$=\frac{tn\pm(tn-2tm)}{2m}.$$

Таким образом, $x_1=\frac{t}{m}(n-m)$, $x_2=t$.

301. Пусть в совхозе было x комбайнов. Таким образом, объем всей работы $24x$ комбайно-часов.

Согласно плану за первые $(x-1)$ часов было выработано

$$1+2+3+\ldots+(x-1)=\frac{x(x-1)}{2}\text{ комбайно-часов.}$$

Пусть после этого все x комбайнов работали еще y часов, выработав дополнительно (xy) комбайно-часов.

Итак, имеем уравнение

$$\frac{x(x-1)}{2}+xy=24x. \qquad (1)$$

Так как $x\neq 0$, то уравнение (1) равносильно такому:

$$x+2y=49. \qquad (2)$$

При работе по плану затрачено на всю работу $(x-1+y)$ часов. Но согласно условию $(x-5)$ комбайнов могут выполнить всю работу на 6 часов скорее, т. е. за $(x+y-7)$ часов, т. е.

$$(x-5)\cdot(x+y-7)=24x. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) имеем $y=\frac{49-x}{2y}$. Подставляя это значение y в уравнение (2), после преобразований получим

$$x^2-18x-175=0.$$

Положительный корень $(x=25)$ этого уравнения служит решением задачи.

Ответ. 25 комбайнов.

302. Обозначим число дней, необходимое первому рабочему для выполнения всей работы, через x дней, необходимое второму — через y.

Таким образом, за день первый рабочий может выполнить $\frac{1}{x}$ всей работы, второй — $\frac{1}{y}$. Согласно условию задачи третий рабочий может выполнить за один день $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, т. е. $\frac{x+y}{2xy}$ работы. Третий рабочий за a дней может выполнить $\frac{a(x+y)}{2xy}$ работы, первый — за b дней $\frac{b}{x}$ работы, а второй — за c дней $\frac{c}{y}$ работы. Поскольку работа нами принята за единицу, то имеем систему уравнений

$$\frac{a(x+y)}{2xy}+\frac{b}{x}=1, \quad \frac{b}{x}=\frac{c}{y}.$$

Решая эту систему, находим

$$x=\frac{ab+ac+2bc}{2c}, \quad y=\frac{ab+ac+2bc}{2b}.$$

Теперь определим дневную производительность третьего рабочего:

$$\frac{x+y}{2xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2b+2c}{ab+ac+2bc}=\frac{b+c}{ab+ac+2bc}.$$

Отв. Первый рабочий может выполнить всю работу за $\frac{ab+ac+2bc}{2c}$ дней, второй рабочий — за $\frac{ab+ac+2bc}{2b}$ дней, третий рабочий — за $\frac{ab+ac+2bc}{b+c}$ дней.

303. Пусть первоначальное число $30\,000+x$. Если переставить цифру 3 с первого места на последнее, то получится число $10x+3$. Согласно условию задачи имеем

$$10x+3-30\,000-x=29\,997$$

или

$$9x=59\,994,$$

откуда $x=6666$, а искомое число равно 36 666.

Отв. 36 666.

304. Обозначим большее из искомых чисел через x, а меньшее — через y.

Имеем

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1\cdot5\cdot7\cdot13.$$

Таким образом, могут быть только следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=455; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=91; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x-y=7, \\ x+y=65; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x-y=13, \\ x+y=35. \end{cases} \quad (4)$$

Из (1) находим $x=228$, $y=227$;
из (2) » $x=48$, $y=43$;
из (3) » $x=36$, $y=29$;
из (4) » $x=24$, $y=11$.

Отв. Задача имеет четыре решения: 228, 227; 48, 43; 36, 29; 24, 11.

305. Так как однозначных чисел 9, двузначных 90, трехзначных 900, то для нумерации страниц от 1-й до 999-й включительно требуется

$$9+90\cdot 2+900\cdot 3=2889 \text{ цифр.}$$

Очевидно, что для завершения нумерации книги хватит (с избытком) четырехзначных чисел. Обозначив число четырехзначных чисел через n, имеем

$$2889+4n=6857,$$

откуда $n=992$.

Таким образом, в книге

$$9+90+900+992=1991 \text{ страница.}$$

Отв. 1991 страница.

306. Обозначим число детей буквой x, а число орехов, полученных каждым, буквой y.

Последний ребенок получил xa орехов (заметим, что после того, как он взял xa орехов, никакого остатка не оказалось).

Следовательно,

$$y=xa. \quad (1)$$

Предпоследний ребенок получил

$$(x-1)\,a+\frac{xa}{n-1} \text{ орехов}$$

[так как n-я часть числа в $(n-1)$ раз меньше остальной части этого числа; по смыслу задачи $n\neq 1$].

Составляем уравнение

$$(x-1)\,a+\frac{xa}{n-1}=y. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$(x-1)\,a+\frac{xa}{n-1}=xa,$$

$$ax-a+\frac{ax}{n-1}=ax,$$

$$\frac{ax}{n-1}=a,\quad x=n-1.$$

Отв. Детей было $(n-1)$.

Глава VI

ПРОГРЕССИИ И СУММЫ

307. Первая группа содержит одно число, вторая группа содержит 3 числа, третья содержит 5 чисел, . . . , k-я группа содержит $(2k-1)$ чисел и согласно условию последний член этой группы равен k^2. Поскольку последнее число $(k-1)$-й группы равно $(k-1)^2$, то первый член k-й группы равен $(k-1)^2+1=k^2-2k+2$.

Таким образом, сумма чисел k-й группы

$$S_k=\frac{(k^2-2k+2)+k^2}{2}(2k-1)=(k^2-k+1)(2k-1).$$

Отв $(k^2-k+1)(2k-1)$.

308. Ясно, что $(k+1)$-е нечетное число выражается формулой

$$a_k=2k+1. \qquad (1)$$

Найдем число нечетных чисел, меньших первого числа n-й группы;

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Полагая в формуле (1)

$$k=\frac{n(n-1)}{2},$$

найдем первое нечетное число, входящее в n-ю группу:

$$2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1.$$

Итак, имеем арифметическую прогрессию

$$(n^2-n+1),\ (n^2-n+3),\ \ldots$$

Сумма чисел n-й группы

$$S_n=\frac{2(n^2-n+1)+2(n-1)}{2}n=n^3.$$

Отв. n^3.

309. Общий член первой прогрессии $a_n=17+4(n-1)=4n+13$; общий член второй прогрессии $a'_m=16+5(m-1)=5m+11$. Ясно, что одинаковыми будут те члены, для которых

$$4n+13=5m+11,\quad \text{или}\quad n=m+\frac{m-2}{4}.$$

Для того чтобы n было целым, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{m-2}{4}=k$ было целым числом; отсюда

$$m=4k+2,$$

а следовательно, $a'_m=5(4k+2)+11=20k+21$. Согласно условию задачи $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 99$ (т. е. искомые числа составляют арифметическую прогрессию). Первое такое число 21, а сотое — 2001. Сумма ста чисел

$$S_{100}=\frac{21+2001}{2}\cdot 100=101\,100.$$

Отв. 101 100.

310. Пусть искомые числа a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$. Согласно условию задачи имеем

$$a=(a-d)^2+(a-2d)^2+(a-3d)^2,$$

или

$$14d^2-12ad+(3a^2-a)=0.$$

Чтобы разность d была действительным числом, дискриминант этого уравнения относительно d должен быть неотрицательным, т. е.

$$36a^2-14(3a^2-a)\geqslant 0,$$

или

$$-6a^2+14a\geqslant 0,$$

или

$$3a^2-7a\leqslant 0.$$

Решая это неравенство, получаем

$$0\leqslant a\leqslant\frac{7}{3}.$$

Но поскольку a должно быть целым числом, то $a=1$ или $a=2$. Обычной проверкой устанавливаем, что условию удовлетворяет только $a=2$, тогда искомые числа суть 2, 1, 0, -1.

Ответ. 2, 1, 0, -1.

311. По условию задачи имеем

$$\sin A-\sin B=\sin B-\sin C,$$

отсюда

$$2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}. \qquad (1)$$

Так как $A+B+C=180°$, то

$$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2} \text{ и } \frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2},$$

или

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}. \qquad (3)$$

Поделив обе части равенства (3) на произведение

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

получим

$$2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

312. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}=\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}=\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{d}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$S=\frac{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+\ldots+(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})}{d}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

313. Имеем

$$S_1=\frac{2a_1+d(n_1-1)}{2}n_1,$$

$$S_2=\frac{2a_1+d(n_2-1)}{2}n_2,$$

$$S_3=\frac{2a_1+d(n_3-1)}{2}n_3,$$

или

$$\frac{S_1}{n_1}=a_1+\frac{d}{2}(n_1-1),$$

$$\frac{S_2}{n_2}=a_1+\frac{d}{2}(n_2-1),$$

$$\frac{S_3}{n_3}=a_1+\frac{d}{2}(n_3-1).$$

Умножаем полученные равенства соответственно на (n_2-n_3), (n_3-n_1) и (n_1-n_2) и складываем произведения, после чего найдем

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=$$

$$=a_1[(n_2-n_3)+(n_3-n_1)+(n_1-n_2)]+$$

$$+\frac{d}{2}[(n_1-1)(n_2-n_3)+(n_2-1)(n_3-n_1)+(n_3-1)(n_1-n_2)].$$

Выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю, следовательно,

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2)=0,$$

что и требовалось доказать.

314. В n-й строке стоят числа

$$n,\ n+1,\ \ldots,\ 3n-3,\ 3n-2$$

(всего $2n-1$ чисел). Сумма этих чисел равна

$$\frac{(n+3n-2)(2n-1)}{2}=(2n-1)^2.$$

315. Пусть

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+kn}}=c. \qquad (1)$$

Обозначим через d разность прогрессии. Интерес представляет лишь тот случай, когда $d\neq 0$, так как при $d=0$ все члены прогрессии равны между собой и равенство (1) выполняется (отношение $c=\frac{1}{k}$). Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, из равенства (1) получаем

$$\frac{n}{2}[a_1+a_1+d(n-1)]=\frac{kn}{2}[a_1+nd+a_1+(n+kn-1)d]c,$$

откуда после сокращения и перегруппировки членов находим

$$(2a_1 - 2a_1kc - d + cdk) + n(d - cdk^2 - 2cdk) = 0. \quad (2)$$

Так как равенство (2) имеет место при любом n, то

$$2a_1 - 2a_1kc - d + cdk = 0, \quad (3)$$

$$d(1 - ck^2 - 2ck) = 0. \quad (4)$$

Сократив равенство (4) на $d \neq 0$, будем иметь

$$c = \frac{1}{k(k+2)}. \quad (5)$$

Равенство (3) можно представить в виде

$$(2a_1 - d)(1 - ck) = 0.$$

В силу (5) второй множитель отличен от нуля и, следовательно, $d = 2a_1$.

Таким образом, при условии $d \neq 0$ равенство (1) может иметь место при всех n лишь в случае прогрессии

$$a,\ 3a,\ 5a,\ \ldots\ (a \neq 0). \quad (6)$$

Легко проверить, что прогрессия (6) удовлетворяет условию задачи.

Ответ. $a,\ 3a,\ 5a, \ldots\ (a \neq 0)$.

316. Согласно условию задачи имеем

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d.$$

Если $d = 0$, то доказываемое равенство очевидно.

Считая $d \neq 0$, будем иметь

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)\frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4}\right)\frac{1}{d} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}}\right)\frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{d} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n - a_1}{da_1a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

317. При $n = 3$ имеем $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} = \frac{2}{a_1a_3}$. Отсюда $\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_1a_3} = \frac{1}{a_1a_3} - \frac{1}{a_1a_2}$ и, следовательно, $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. Поэтому достаточно показать, что при любом $n \geqslant 4$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Из условия следует

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-3}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}. \quad (3)$$

Вычитая почленно из равенства (3) равенство (2) и из (2) равенство (1), получаем

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_1a_n}=(n-2)\frac{a_{n-1}-a_n}{a_1a_{n-1}a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{a_1a_{n-2}}=(n-2)\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{a_1a_{n-1}a_{n-2}}.$$

Приведя к общему знаменателю, после сокращения найдем

$$a_1-a_{n-1}=(n-2)(a_{n-1}-a_n),$$
$$a_1-a_{n-1}=(n-2)(a_{n-2}-a_{n-1}).$$

Следовательно, $a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1}$, что и требовалось доказать.

318. Первое решение. Пусть $a, b, c, \ldots, k, l$ — конечная арифметическая прогрессия, n — число ее членов, а d — разность, причем $d\neq 0$.

Если u_m и v_m m-е члены прогрессии, равноотстоящие от ее концов, то

$$u_m=a+d(m-1), \quad v_m=l-d(m-1)$$

и

$$u_mv_m=[a+d(m-1)][l-d(m-1)]=$$
$$=al+d(m-1)(l-a)-d^2(m-1)^2.$$

Так как $l=a+d(n-1)$, то

$$u_mv_m=al+d^2(m-1)(n-m). \quad (1)$$

Аналогично находим

$$u_pv_p=al+d^2(p-1)(n-p), \quad (2)$$

где u_p и v_p — p-е члены прогрессии, равноотстоящие от ее концов.

Вычитая из равенства (2) равенство (1), находим

$$u_pv_p-u_mv_m=d^2[(p-1)(n-p)-(m-1)(n-m)]=$$
$$=d^2(p-m)[n+1-(p+m)].$$

Пусть $p > m$. Согласно условию задачи мы можем считать, что $p \leqslant \frac{n}{2}$ и $m \leqslant \frac{n}{2}$, поэтому $p+m \leqslant n$.

Итак, $d^2 > 0$, $p-m > 0$, $n+1-(p+m) \geqslant 1$, а потому

$$d^2(p-m)[n+1-(p+m)] > 0.$$

Следовательно, $u_p v_p > u_m v_m$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть x и y—два члена арифметической прогрессии, равноотстоящие от концов ее.

Тогда $x+y=c$—постоянная величина, равная сумме крайних членов.

Рассмотрим тождество

$$2xy=(x+y)^2-(x-y)^2,$$

или

$$xy=\frac{1}{2}[c^2-(x-y)^2]. \qquad (1)$$

По мере удаления x и y от концов к середине $(x-y)^2$ уменьшается, а поэтому на основании равенства (1) произведение xy возрастает.

319. Первое решение. Обозначим через a и q абсолютные величины первого члена и знаменателя прогрессии. Согласно условию задачи число членов прогрессии не менее трех и, кроме того, абсолютные величины членов не равны между собой, поэтому q—положительное число, не равное единице.

Обозначим сумму абсолютных величин крайних членов прогрессии через S, сумму абсолютных величин k-го члена от начала и k-го члена от конца через S_k, число всех членов через $m+1$ (m—целое положительное число, не меньшее двух). В силу наших обозначений последний член равен aq^m.

Имеем

$$S-S_2=a+aq^m-(aq+aq^{m-1})=$$
$$=a-aq-(aq^{m-1}-aq^m)=a(1-q)-aq^{m-1}(1-q),$$

т. е.

$$S-S_2=a(1-q)(1-q^{m-1}).$$

Так как $(m-1)$—целое положительное число и q—положительное число, не равное единице, то разности $(1-q)$ и $(1-q^{m-1})$ одновременно отрицательны или одновременно положительны, смотря по тому, будет ли q больше единицы или меньше единицы. Поэтому $(1-q)(1-q^{m-1})>0$, а так как и $a>0$, то $a(1-q)\times$ $\times(1-q^{m-1})>0$, или же $S-S_2>0$, т. е.

$$S > S_2.$$

Аналогично доказывается, что $S_2 > S_3$, $S_3 > S_4$, ...

Итак, $S > S_2 > S_3 > \ldots > S_{p-1} > S_p$, где $p=\frac{m}{2}$ или $p=\frac{m+1}{2}$, смотря по тому, будет ли m числом четным или нечетным.

Второе решение. Фактически надо доказать указанное свойство для геометрической прогрессии, все члены которой положительны.

Пусть x и y — два члена этой прогрессии, равноотстоящие от концов ее.

Тогда $xy=a_1a_n$, где a_1, a_n — соответственно первый и последний члены прогрессии, есть постоянная величина.

Рассмотрим тождество

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy,$$

или

$$x+y=\sqrt{(x-y)^2+4a_1a_n}.$$

Так как a_1a_n — постоянная величина, то при сближении x и y по их местоположению $(x-y)^2$ убывает, а поэтому убывает и $(x+y)$.

320. Согласно условию задачи имеем

$$x_{n+1}-x_n=aq^n.$$

Следовательно,

$$x_2=x_1+aq,$$

$$x_3=x_2+aq^2=x_1+aq+aq^2,$$

$$x_4=x_3+aq^3=x_1+aq+aq^2+aq^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n=x_1+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}=x_1+aq\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q}.$$

321. Имеем

$$aq^{n-1}+aq^n+aq^{n+1}+aq^{n+2}+aq^{n+3}=19aq^{n+1},$$

или

$$aq^{n-1}(1+q-18q^2+q^3+q^4)=0.$$

Так как a и q не могут быть равны нулю, то

$$1+q-18q^2+q^3+q^4=0.$$

Поделим обе части этого уравнения на q^2.

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}-18+q+q^2=0.$$

Обозначим $q+\frac{1}{q}$ через u, тогда уравнение примет вид

$$u^2+u-20=0,$$

откуда

$$q_1=2+\sqrt{3},\quad q_2=2-\sqrt{3},\quad q_3=\frac{-5+\sqrt{21}}{2},\quad q_4=\frac{-5-\sqrt{21}}{2}. \quad (1)$$

Так как прогрессия возрастающая, то из значений (1) условию удовлетворяет только

$$q=2+\sqrt{3}.$$

Тогда m-й член прогрессии

$$a(2+\sqrt{3})^{m-1}=1,$$

откуда

$$a=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-1}},$$

и искомая прогрессия будет

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-1}},\ \frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-2}},\ \frac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-3}},\ \ldots$$

322. По условию задачи $|q|<1$, а

$$q^n=k(q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots)=kq^{n+1}\frac{1}{1-q}.$$

Отсюда $1-q=kq$ и, следовательно, $q=\frac{1}{k+1}$. Но так как $|q|<1$, значит,

$$\left|\frac{1}{k+1}\right|<1.$$

Это последнее имеет место при $k>0$ или $k<-2$.

Отв. $k>0$ или $k<-2$.

323. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательные n членов геометрической прогрессии.

Предварительно докажем, что

$$P^2=(a_1a_2a_3\ldots a_n)^2=(a_1a_n)^n. \qquad (1)$$

Действительно,

$$P^2=(a_1a_1qa_1q^2\ldots a_1q^{n-1})^2=\left[a_1^nq^{1+2+3+\ldots+(n-1)}\right]^2=$$

$$=\left[a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^2=a_1^{2n}q^{n(n-1)}=\left(a_1^2q^{n-1}\right)^n=$$

$$=(a_1a_1q^{n-1})^n=(a_1a_n)^n.$$

Согласно условию задачи имеем

$$S_1=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

и

$$S_2=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}.$$

Если обозначить знаменатель данной прогрессии через q, то знаменатель прогрессии

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}$$

будет $\frac{1}{q}$.

Итак,

$$S_1 = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}, \tag{2}$$

$$S_2 = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{a_n q - a_1}{a_1 a_n (q-1)} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}\frac{1}{a_1 a_n}. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует, что

$$\frac{S_1}{S_2} = a_1 a_n. \tag{4}$$

Из (1) и (4) окончательно имеем

$$P = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}.$$

324. Имеем

$$S_n = \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1 q_1} \pm \frac{1}{aq} + \frac{1}{a_1 q_1^2} \pm \frac{1}{aq^2} + \ldots + \frac{1}{a_1 q_1^n} \pm \frac{1}{aq^n} =$$

$$= \frac{1}{a_1}\left[1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \ldots + \frac{1}{q_1^n}\right] \pm \frac{1}{a}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^n}\right].$$

Так как $q > 1$, $q_1 > 1$ и $n \to \infty$, то выражения, стоящие в скобках, представляют суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий, а потому, обозначая искомый предел буквой S, получим

$$S = \frac{1}{a_1}\frac{1}{1 - \frac{1}{q_1}} \pm \frac{1}{a}\frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q_1}{a_1 (q_1 - 1)} \pm \frac{q}{a (q-1)}.$$

325. Согласно условию задачи имеем

$$a + c = 2b, \tag{1}$$

$$c^2 = bd, \tag{2}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{e} = \frac{2}{d}. \tag{3}$$

Деля равенство (1) на равенство (2) и принимая во внимание равенство (3), получаем

$$\frac{a+c}{c^2}=\frac{2}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{c^2}+\frac{1}{c}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e},$$

откуда

$$\frac{a}{c^2}=\frac{1}{e}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{a}{c}=\frac{c}{e}.$$

Поэтому a, c, e составляют геометрическую прогрессию.

326. Согласно условию имеем

$$a=a_1+4d=u_1q^4,$$
$$b=a_1+16d=u_1q^{16},$$
$$c=a_1+36d=u_1q^{36},$$

где a_1, u_1 — соответственно первые члены арифметической и геометрической прогрессий, d — разность арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической прогрессии.

Из этих равенств находим

$$a-b=-12d,$$
$$b-c=-20d,$$
$$c-a=32d.$$

Итак,

$$a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b}=(u_1q^4)^{-20d}(u_1q^{16})^{32d}(u_1q^{36})^{-12d}=u^0q^0=1.$$

327. Пусть первые члены обеих прогрессий a, разность первой d и знаменатель второй q. Согласно условию

$$[a+(a+d)]-(a+aq)=3a,$$

или

$$2a+d-a-aq=3a,$$

откуда

$$d=a(q+2). \tag{1}$$

Далее, по условию

$$a+(a+d)+(a+2d)=a+aq+aq^2,$$

или

$$2a+3d=aq+aq^2,$$

откуда

$$d=\frac{a(q^2+q-2)}{3}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$3(q+2)=q^2+q-2,$$

откуда

$$q_1=4, \quad q_2=-2.$$

Подставляя значения q в (1), получаем

$$d_1=6a, \quad d_2=0.$$

Очевидно, что $d=0$ не дает прогрессии. Таким образом, искомые прогрессии

$$a,\ 7a,\ 13a,\ \ldots,$$

$$a,\ 4a,\ 16a,\ \ldots,$$

где a — произвольное число.

328. Обозначим

$$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}, \quad d=a_2-a_1.$$

При $n>2$ имеем

$$b_n=b_1q^{n-1}=a_1\left(\frac{a_1+d}{a_1}\right)^{n-1}=a_1\left(1+\frac{d}{a_1}\right)^{n-1}=$$

$$=a_1\left[1+(n-1)\frac{d}{a_1}+C_{n-1}^2\frac{d^2}{a_1^2}+\ldots\right]>a_1\left[1+\frac{(n-1)\,d}{a_1}\right]=$$

$$=a_1+(n-1)\,d=a_n,$$

т. е. $a_n<b_n$.

329. По условию задачи

$$a_1>0, \ \frac{a_2}{a_1}=q>0 \quad \text{и} \quad b_2-b_1=d>0,$$

где, как обычно, q есть знаменатель геометрической прогрессии, а d — разность арифметической прогрессии.

Пользуясь тем, что $a_n=a_1q^{n-1}$ и $b_n=b_1+(n-1)\,d$, получаем

$$\log_\alpha a_n-b_n=(n-1)\,(\log_\alpha q-d)+\log_\alpha a_1-b_1.$$

Для того чтобы рассматриваемая разность не зависела от n, необходимо и достаточно, чтобы $\log_\alpha q-d=0$ Решив это уравнение, находим

$$\alpha=q^{\frac{1}{d}}. \qquad (1)$$

Следовательно, искомое число α существует и определяется по формуле (1).

330. Первое решение. Чтобы найти сумму квадратов первых n чисел натурального ряда, рассмотрим тождество

$$3x^2+3x+1=(x+1)^3-x^3.$$

Полагая в этом тождестве $x=1, 2, 3, \ldots, n$, сложим почленно n полученных равенств

$$3\,(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3\,(1+2+3+\ldots+n)+n=(n+1)^3-1,$$

или

$$3S_n'+3S_n+n=(n+1)^3-1, \qquad (1)$$

где S_n и S'_n — соответственно сумма n чисел натурального ряда и сумма их квадратов.

Из равенства (1) и из равенства

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

находим

$$S'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Второе решение. Пусть S'_n — сумма, стоящая в левой части формулы. При $n=1$ обе части формулы совпадают. Покажем, что если формула верна для некоторого n, то она верна также для $n+1$. Имеем

$$S'_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Следовательно, формула верна при любом натуральном n.

331. Имеем

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{1\cdot 2} = \frac{k^2-k}{2};$$

отсюда

$$k^2 = 2C_k^2 + k.$$

Придавая k в этом равенстве значения 2, 3, ..., n, получим

$$2^2 = 2C_2^2 + 2,$$
$$3^2 = 2C_3^2 + 3,$$
$$4^2 = 2C_4^2 + 4,$$
$$\ldots\ldots$$
$$n^2 = 2C_n^2 + n.$$

Сложив эти $(n-1)$ равенств и прибавив к обеим частям по единице, получим

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = 2\left(C_2^2+C_3^2+C_4^2+\ldots+C_n^2\right)+$$
$$+(1+2+3+\ldots+n).$$

Но

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2.$$

Следовательно,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = C_{n+1}^2 + 2\left(C_n^2+C_{n-1}^2+\ldots+C_2^2\right).$$

332. Первое решение. При $n=1$ левая часть формулы равна правой части ($2=2$).

Покажем, что если формула верна для $n=k$, то она верна также для $n=k+1$.

Имеем

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{3}(k+3)=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}.$$

Следовательно, формула верна при любом натуральном n.

Второе решение. Имеем

$$S_n=1(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\ldots+n(n+1)=$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n).$$

Но так как

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

а

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(см. задачу 330), то

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Третье решение. Напишем n очевидных равенств:

$$1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2=3\cdot(1\cdot2),$$
$$2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3=3\cdot(2\cdot3),$$
$$3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4=3\cdot(3\cdot4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3[n(n+1)].$$

Складывая эти n равенств, получим

$$n(n+1)(n+2)=3[1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)]=3S_n,$$

откуда

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

333. Сумма k членов данного ряда

$$S_k=n^3-n\cdot1^2+2\cdot3n^2-2^2\cdot2n+3\cdot5n^2-3^2\cdot3n+\ldots+$$
$$+(2k-1)kn^2-k^2\cdot kn,$$

или

$$S_k=n^2[1+2\cdot3+3\cdot5+\ldots+k(2k-1)]-$$
$$-n(1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3). \quad (1)$$

Имеем

$$1=2\cdot 1^2-1,$$
$$2\cdot 3=2(2\cdot 2-1)=2\cdot 2^2-2,$$
$$3\cdot 5=3(2\cdot 3-1)=2\cdot 3^2-3,$$
$$4\cdot 7=4(2\cdot 4-1)=2\cdot 4^2-4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k(2k-1)=2k^2-k.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$1+2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+\ldots+k(2k-1)=2(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2)-$$
$$-(1+2+3+\ldots+k)=2\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}=$$
$$=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}. \qquad (2)$$

Известно, что

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует

$$S_k=\frac{n^2k(k+1)(4k-1)}{6}-\frac{nk^2(k+1)^2}{4}.$$

При $k=n$ имеем

$$S_n=\frac{n^3(n+1)(4n-1)}{6}-\frac{n^3(n+1)^2}{4}=$$
$$=\frac{n^3(n+1)}{12}[8n-2-3n-3]=\frac{5n^3(n^2-1)}{12}.$$

Отв. $\frac{5n^3(n^2-1)}{12}$.

334. Имеем

$$S_n=(4\cdot 1^2-1)x+(4\cdot 2^2-1)x^2+\ldots+(4\cdot n^2-1)x^n,$$

или

$$S_n=4(1^2\cdot x+2^2\cdot x^2+\ldots+n^2x^n)-(x+x^2+\ldots+x^n). \qquad (1)$$

Пусть

$$y=x+2^2x^2+\ldots+n^2x^n. \qquad (2)$$

Умножим обе части последнего равенства на x

$$xy=x^2+2^2x^3+\ldots+n^2x^{n+1}. \qquad (3)$$

Вычтем из равенства (2) равенство (3)

$$y(1-x)=x+3x^2+5x^3+\ldots+(2n-1)x^n-n^2x^{n+1}. \qquad (4)$$

Умножим равенство (4) на x

$$xy(1-x)=x^2+3x^3+5x^4+\ldots+(2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}. \qquad (5)$$

Наконец, вычитая из равенства (4) равенство (5), получаем

$$y(1-x)^2=x+2(x^2+x^3+\ldots+x^n)-(n^2+2n-1)x^{n+1}+n^2x^{n+2},$$

или

$$y(1-x)^2=x+\frac{2(x^2-x^{n+1})}{1-x}-(n^2+2n-1)x^{n+1}+n^2x^{n+2}. \qquad (6)$$

Воспользовавшись тем, что

$$x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x-x^{n+1}}{1-x},$$

получаем из (6)

$$y=\frac{x+x^2-(n^2+2n+1)x^{n+1}}{(1-x)^3}+\frac{(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Подставляя значение y в (1), находим

$$S_n=\frac{3x+6x^2-x^3-(4n^2+8n+3)x^{n+1}}{(1-x)^3}+$$
$$+\frac{(8n^2+8n-6)x^{n+2}-(4n^2-1)x^{n+3}}{(1-x)^3}.$$

Изложенное выше имело смысл при $x\neq 1$. Если же $x=1$, то из (1) следует

$$S_n=4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-n=$$
$$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\frac{n}{3}(4n^2+6n-1).$$

Ответ. $\frac{n}{3}(4n^2+6n-1)$.

335. Складывая тождества

$$1\cdot 2=1(3-1)=1\cdot 3-1,$$
$$1\cdot 3\cdot 4=1\cdot 3(5-1)=1\cdot 3\cdot 5-1\cdot 3,$$
$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 6=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7-1\cdot 3\cdot 5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1)2n=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1)(2n+1)-$$
$$-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1),$$

находим

$$1\cdot 2+1\cdot 3\cdot 4+1\cdot 3\cdot 5\cdot 6+\ldots+1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1)2n=$$
$$=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)-1.$$

Ответ. $1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)-1$.

336. Замечая, что n-й член ряда равен

$$2\cdot4\cdot6\ldots2(n-1)(2n-1)$$

и складывая тождества

$$1=1,$$
$$2\cdot3=2(4-1)=2\cdot4-2,$$
$$2\cdot4\cdot5=2\cdot4(6-1)=2\cdot4\cdot6-2\cdot4,$$
$$2\cdot4\cdot6\cdot7=2\cdot4\cdot6\cdot8-2\cdot4\cdot6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots[2(n-1)](2n-1)=2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots(2n)-$$
$$-2\cdot4\ldots[2(n-1)],$$

получим

$$1+2\cdot3+2\cdot4\cdot5+2\cdot4\cdot6\cdot7+\ldots$$
$$\ldots+2\cdot4\cdot6\cdot8\ldots[2(n-1)](2n-1)=(2\cdot4\cdot6\ldots2n)-1=2^n\cdot n!-1.$$

Отв. $2^n n!-1$.

337. Возвышая в квадрат обе части равенства

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

получим

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2+2[1\cdot2+1\cdot3+\ldots+(n-1)n]=$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (1)$$

Выражение, заключенное в квадратных скобках, есть искомая сумма; обозначим ее через S.

Так как

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то (1) принимает вид

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}+2S=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

откуда

$$S=\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

338. Имеем

$$2\cdot1^2=1^2+1^3,$$
$$3\cdot2^2=2^2+2^3,$$
$$4\cdot3^2=3^2+3^3,$$
$$\ldots\ldots$$
$$(n+1)n^2=n^2+n^3.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$S=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3).$$

Известно, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}$$

и

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

поэтому

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot3\cdot4}.$$

Отв. $\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot3\cdot4}$.

339. Имеем

$$S=-(a_2^2-a_1^2)-(a_4^2-a_3^2)-\ldots-(a_{2n}^2-a_{2n-1}^2)=$$
$$=-[(a_2-a_1)(a_2+a_1)+(a_4-a_3)(a_4+a_3)+\ldots+(a_{2n}-a_{2n-1})\times$$
$$\times(a_{2n}+a_{2n-1})]=-d(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n}),$$

так как разность прогрессии $d=a_2-a_1=a_4-a_3=\ldots=a_{2n}-a_{2n-1}$.

Далее

$$S=-d\frac{2a_1+d(2n-1)}{2}\cdot2n=dn\,[d(1-2n)-2a_1].$$

Отв. $dn\,[d(1-2n)-2a_1]$.

340. Так как

$$8=9-1,$$
$$2\cdot89=2(9\cdot10-1)=9\cdot2\cdot10-2,$$
$$3\cdot899=3(9\cdot10^2-1)=9\cdot3\cdot10^2-3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\cdot\overbrace{899\ldots9}^{n\text{ раз}}=n(9\cdot10^n-1)=9n\cdot10^n-n,$$

то данная сумма

$$S=9(1+2\cdot10+3\cdot10^2+\ldots+n\cdot10^{n-1})-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть

$$A=1+2\cdot10+3\cdot10^2+\cdots+n\cdot10^{n-1},$$

тогда

$$10A=10+2\cdot10^2+\ldots+(n-1)\cdot10^{n-1}+n\cdot10^n,$$

откуда

$$-9A=1+10+10^2+10^3+\ldots+10^{n-1}-n\cdot10^n$$

и

$$A=\frac{1}{9}\left[n\cdot10^n-\frac{10^n-1}{9}\right].$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{9}\left[(9n-1)\cdot 10^n+1\right]-\frac{n(n+1)}{2}.$$

341. Умножив обе части равенства

$$S_n=1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+\ldots+na^{n-1} \qquad (1)$$

на a, получим

$$aS_n=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+na^n. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$(a-1)S_n=-(1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1})+na^n,$$

или

$$(a-1)S_n=na^n-\frac{a^n-1}{a-1},$$

откуда находим

$$S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}.$$

342. Легко убедиться в справедливости утверждения при $n=1$. Пусть формула верна при некотором $n\geqslant 1$. Обозначим через S_n сумму, стоящую в левой части формулы. Имеем

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Отсюда

$$S_{n+1}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{(n+1)[(n+1)+3]}{4[(n+1)+1][(n+1)+2]}.$$

Следовательно, формула справедлива при любом натуральном n.

343. Заметив, что

$$\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right),$$

имеем

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Ответ. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$.

344. Имеем

$$S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{2+1}{2} + \frac{2^2+1}{2^2} + \frac{2^3+1}{2^3} + \ldots + \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^2} + 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + 1 + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Выражение, заключенное в скобках, есть сумма $(n-1)$-го члена убывающей геометрической прогрессии. Поэтому искомая сумма

$$S_n = n + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = n + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

345. Имеем

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} = \frac{2^2-1}{(1\cdot 2)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2},$$

$$\frac{5}{(2\cdot 3)^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2},$$

. . . . . .

$$\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Складывая почленно эти n равенств, получаем

$$\frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ответ. $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

346. Рассмотрим тождество

$$a - a_n = (a - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n).$$

Пусть

$$a = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\cdot 3}, \quad a_3 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{2\cdot 3\ldots(n+1)},$$

тогда

$$1 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{n}{2\cdot 3\ldots(n+1)} = S_n.$$

Итак,

$$S_n = 1 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}.$$

347. Имеем

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right),$$

$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right),$$

$$\frac{1}{7\cdot 10}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right),$$

$$\frac{1}{10\cdot 13}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Итак,

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}\right)+$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим

$$S=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{3n}{3(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

Отв. $\frac{n}{3n+1}$.

348. Имеем

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}.$$

Далее,

$$S-\frac{S}{2}=\frac{S}{2}=\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n}{2^n},$$

или

$$\frac{S}{2}=2-\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n},$$

откуда

$$S=4-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}.$$

349. Легко заметить, что левая часть доказываемого равенства равна

$$(1-10)^{2n}=(-9)^{2n}=81^n.$$

350. Составим комплексное число

$$K = A + Bi = (\cos x + i \sin x) + 2(\cos 2x + i \sin 2x) +$$
$$+ 3(\cos 3x + i \sin 3x) + \ldots + n(\cos nx + i \sin nx) =$$
$$= \cos x + i \sin x + 2(\cos x + i \sin x)^2 +$$
$$+ 3(\cos x + i \sin x)^3 + \ldots + n(\cos x + i \sin x)^n =$$
$$= z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n,$$

где

$$z = \cos x + i \sin x.$$

Теперь находим произведение

$$K(1-z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n - z^2 - 2z^3 - \ldots - (n-1)z^n - nz^{n+1} =$$
$$= z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n - nz^{n+1} = \frac{z - z^{n+1}}{1-z} - nz^{n+1},$$

откуда

$$K = \frac{z - z^{n+1}}{(1-z)^2} - n\frac{z^{n+1}}{1-z}. \qquad (1)$$

Далее определяем

$$(1-z)^2 = (1 - \cos x - i \sin x)^2 =$$
$$= 1 - 2\cos x + \cos^2 x - 2i \sin x(1 - \cos x) - \sin^2 x =$$
$$= 2\cos^2 x - 2\cos x - 2i \sin x(1 - \cos x) =$$
$$= -2\cos x(1 - \cos x) - 2i \sin x(1 - \cos x) =$$
$$= -2(1 - \cos x)(\cos x + i \sin x) = -2(1 - \cos x)z. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$K = \frac{1 - z^n - nz^n(1-z)}{-2(1-\cos x)} = \frac{1 - z^n - nz^n + nz^{n+1}}{-2(1-\cos x)} =$$
$$= \frac{1 - (n+1)(\cos nx + i \sin nx) + n[\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x]}{-2(1-\cos x)}.$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, то

$$A = -\frac{1 - (n+1)\cos nx + n\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}$$

и

$$B = \frac{-(n+1)\sin nx + n\sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}.$$

351. Имеем

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}+2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}+2\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+2\sin(\alpha+n\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\right.\right.$$

$$-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\Big]+\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+3\frac{\beta}{2}\right)\right]+\ldots$$

$$\left.\ldots+\left[\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right]=$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

352.

$$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)+\ldots+$$

$$+\cos(\alpha+n\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\beta\right]+$$

$$+\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\beta\right]+\ldots+\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+n\beta\right].$$

Заменим в формуле предыдущей задачи α суммой $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$$S=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

353. Так как $\operatorname{ctg}(k-1)x-\operatorname{ctg}kx=\frac{\sin x}{\sin(k-1)x\sin kx}$, то

$$\frac{1}{\sin(k-1)x\sin kx}=\operatorname{cosec}x\,[\operatorname{ctg}(k-1)x-\operatorname{ctg}kx].$$

Придавая k значения 2, 3, ..., n, получим

$$\frac{1}{\sin x\sin 2x}=\operatorname{cosec}x\,(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x),$$

$$\frac{1}{\sin 2x\sin 3x}=\operatorname{cosec}x\,(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}3x),$$

. . . . . .

$$\frac{1}{\sin(n-1)x\sin nx}=\operatorname{cosec}x\,[\operatorname{ctg}(n-1)x-\operatorname{ctg}nx].$$

Сложив эти равенства, найдем

$$S=\operatorname{cosec} x\,(\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} nx),$$

или

$$S=\frac{\sin(n-1)x}{\sin^2 x\sin nx}.$$

354. Пусть r — разность прогрессии, тогда искомая сумма

$$S=\sin a_1\sin(a_1+r)+$$
$$+\sin(a_1+r)\sin(a_1+2r)+\ldots+\sin[a_1+(n-1)r]\sin(a_1+nr).$$

Имеем

$$S=\frac{\cos r-\cos(2a_1+r)}{2}+$$
$$+\frac{\cos r-\cos(2a_1+3r)}{2}+\ldots+\frac{\cos r-\cos[2a_1+(2n-1)r]}{2},$$

откуда

$$2S=n\cos r-[\cos(2a_1+r)+$$
$$+\cos(2a_1+3r)+\ldots+\cos[2a_1+(2n-1)r].$$

Умножив обе части этого равенства на $2\sin r$ и зная, что

$$2\sin r\cos r=\sin 2r,$$
$$2\sin r\cos(2a+r)=\sin 2(a+r)-\sin 2a,$$
$$2\sin r\cos(2a+3r)=\sin 2(a+2r)-\sin 2(a+r),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\sin r\cos[2a+(2n-1)r]=\sin 2(a+nr)-\sin 2[a+(n-1)r],$$

получим

$$S=\frac{n\sin 2r-2\cos(2a+rn)\sin nr}{4\sin r}.$$

355. Известно, что

$$\operatorname{tg}(a_2-a_1)=\frac{\operatorname{tg} a_2-\operatorname{tg} a_1}{1+\operatorname{tg} a_2\operatorname{tg} a_1},$$

откуда

$$\operatorname{tg} a_1\operatorname{tg} a_2=\frac{\operatorname{tg} a_2-\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg}(a_2-a_1)}-1=\frac{\operatorname{tg} a_2-\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} r}-1,$$

где r — разность прогрессии.

Аналогично имеем

$$\operatorname{tg} a_2\operatorname{tg} a_3=\frac{\operatorname{tg} a_3-\operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg}(a_3-a_2)}-1=\frac{\operatorname{tg} a_3-\operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg} r}-1,$$
$$\operatorname{tg} a_3\operatorname{tg} a_4=\frac{\operatorname{tg} a_4-\operatorname{tg} a_3}{\operatorname{tg}(a_4-a_3)}-1=\frac{\operatorname{tg} a_4-\operatorname{tg} a_3}{\operatorname{tg} r}-1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\operatorname{tg} a_{n+1}\operatorname{tg} a_n=\frac{\operatorname{tg} a_{n+1}-\operatorname{tg} a_n}{\operatorname{tg}(a_{n+1}-a_n)}-1=\frac{\operatorname{tg} a_{n+1}-\operatorname{tg} a_n}{\operatorname{tg} r}-1.$$

Складывая почленно последние n равенств, получим искомую сумму

$$S=\frac{\operatorname{tg} a_{n+1}-\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} r}-n.$$

356. Известно, что

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

откуда

$$2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha-1.$$

Подставляя в это равенство вместо α последовательно $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2^2}$, $\frac{\alpha}{2^3}$, ..., $\frac{\alpha}{2^{2n}}$, получим $2n$ равенств

$$2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2^2}-1,$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^2}=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2^3}-1,$$

. . . . . .

$$2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{2n}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{2n-1}}=\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2^n}-1.$$

Перемножив 1-е, 3-е, 5-е, ..., $(2n-1)$-е равенства и разделив полученное произведение на произведение остальных равенств, легко получим доказываемое равенство.

357. Предварительно докажем тождество

$$\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=-2\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

отсюда следует справедливость тождества (1). Из (1) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-2}}$$

Складывая почленно эти равенства, получим

$$S=\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}-2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

358. Умножим числитель и знаменатель заданного выражения на $2\sin\alpha$:

$$A=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin 3\alpha+\ldots+2\sin\alpha\sin(2n-1)\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\alpha\cos 3\alpha+\ldots+2\sin\alpha\cos(2n-1)\alpha}=$$

$$=\frac{(1-\cos 2\alpha)+(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+\ldots+[\cos 2(n-1)\alpha-\cos 2n\alpha]}{\sin 2\alpha+(\sin 4\alpha-\sin 2\alpha)+\ldots+[\sin 2n\alpha-\sin 2(n-1)\alpha]}=$$

$$=\frac{1-\cos 2n\alpha}{\sin 2n\alpha}=\frac{2\sin^2 n\alpha}{2\sin n\alpha\cos n\alpha}=\operatorname{tg} n\alpha.$$

Отв. $\operatorname{tg} n\alpha$.

359. Имеем

$$\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha},$$

$$\cos 2\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha},$$

$$\cos 4\alpha=\frac{\sin 8\alpha}{2\sin 4\alpha},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2\sin 2^k\alpha}.$$

Перемножив почленно эти $(k+1)$ равенств, получим

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\ldots\cos 2^k\alpha=\frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

360. Имеем

$$\sin\alpha\sin\alpha=\frac{\cos 0-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin 3\alpha\sin\alpha=\frac{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}{2},$$

$$\sin 5\alpha\sin\alpha=\frac{\cos 4\alpha-\cos 6\alpha}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin(2n-1)\alpha\sin\alpha=\frac{\cos(2n-2)\alpha-\cos 2n\alpha}{2}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\sin\alpha[\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha]=\frac{1-\cos 2n\alpha}{2},$$

или

$$\sin\alpha[\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha]=\sin^2 n\alpha.$$

Поделив обе части последнего равенства на $\sin^2\alpha$, получим

$$\frac{1}{\sin\alpha}[\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha]=\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right)^2.$$

361. Имеем

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 2\alpha=\frac{1+\cos 4\alpha}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos^2 n\alpha=\frac{1+\cos 2n\alpha}{2}.$$

Сложив эти n равенств, получим

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\frac{n+(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha)}{2}.$$

Легко доказать (см. задачу 352), что

$$\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha=\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha},$$

поэтому

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\frac{1}{2}\left[n+\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right].$$

Ответ. $\frac{1}{2}\left[n+\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right]$.

362. Заменяя α на β, а n на $n+1$ в формуле

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)=$$
$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

(см. задачу 352), получим

$$S=\frac{\cos\left[\alpha+\frac{(n-1)\alpha}{2}\right]\sin\frac{(n-1+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

363. Заменяя β на α, а n на $n+1$ в формуле

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=$$
$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

(см. задачу 351), получим

$$S=\frac{\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\alpha}{2}\right]\sin\left(\frac{n-1+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

364. Имеем

$$\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{1}{3}=\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}-\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)=$$
$$=\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6},$$

$$\arcsin\frac{1}{3}-\arcsin\frac{1}{4}=\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12},$$

. . . . . .

$$\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1}=\arcsin\left[\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}-\frac{1}{n+1}\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right]=$$
$$=\arcsin\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}.$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$S_n=\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{n+1}.$$

Так как

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}=\arcsin\frac{1}{n+1}+\arccos\frac{1}{n+1},$$

то

$$S_n=\arcsin\frac{1}{n+1}+\arccos\frac{1}{n+1}-\arcsin\frac{1}{n+1}=\arccos\frac{1}{n+1}.$$

Ответ. $\arccos\dfrac{1}{n+1}$.

Глава VII

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

365. Логарифмируя обе части равенства $a^{\log_a b}=b$ по основанию b, получаем

$$\log_a b \log_b a = \log_b b = 1,$$

откуда

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

366. Так как

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad \text{и} \quad a^{\log_a b}=b,$$

то

$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}} = (a^{\log_a b})^{\log_b \log_b a} = b^{\log_b \log_b a} = \log_b a.$$

367. Логарифмируя обе части равенства $a^{\log_a N}=N$ по основанию b, получаем

$$\log_b (a^{\log_a N}) = \log_b N, \quad \text{или} \quad \log_a N (\log_b a) = \log_b N,$$

откуда

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

368. Имеем (см. задачу 367)

$$\log_{ab} N = \frac{\log_a N}{\log_a (ab)},$$

следовательно,

$$\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = \frac{\log_a N}{\frac{\log_a N}{\log_a (ab)}} = \log_a (ab) = \log_a a + \log_a b = 1 + \log_a b.$$

369. Требуется доказать, что $\log_a N$, $\log_b N$ и $\log_c N$ — три последовательных члена арифметической прогрессии, т. е.

$$2 \log_b N = \log_a N + \log_c N, \tag{1}$$

или (после приведения всех логарифмов к основанию a)

$$\frac{2 \log_a N}{\log_a b} = \log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a c},$$

или

$$\frac{2}{\log_a b} = 1 + \frac{1}{\log_a c},$$

или

$$(\log_a b)(1 + \log_a c) = 2 \log_a c,$$

или

$$(ac)^{\log_a b} = c^2. \tag{2}$$

Так как произведенные операции обратимы, то из (2) следует (1).

370. Первое решение. Пусть $\log_b a = x$, т. е. $b^x = a$. Возведя последнее равенство в степень n, получаем $b^{nx} = a^n$, или $(b^n)^x = a^n$.

Следовательно,

$$\log_{b^n} a^n = x,$$

или согласно нашим обозначениям имеем

$$\log_b a = \log_{b^n} a^n.$$

Второе решение. Имеем

$$\log_b a = \frac{n \log_b a}{n \log_b b} = \frac{\log_b a^n}{\log_b b^n} = \frac{\log_{b^n} a^n}{\log_{b^n} b \log_b b^n} = \log_{b^n} a^n.$$

371. Логарифмируя обе части равенства $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ по основанию a, получаем

$$2 = \log_a (c-b) + \log_a (c+b).$$

Отсюда

$$2 = \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a}$$

и, следовательно,

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

372. Вначале докажем, что $b > 0$. Действительно, выражение $4ab$ равно сумме квадратов $(4a^2 + 9b^2)$, из которых один не равен нулю $(4a^2 > 0)$, поэтому $ab > 0$. Но так как $a > 0$, то и $b > 0$.

Поделив обе части равенства $4a^2 + 9b^2 = 4ab$ на 16, получим

$$\frac{a^2}{4} + \frac{9b^2}{16} = \frac{ab}{4}. \qquad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) по $\frac{3ab}{4}$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{3ab}{4} + \frac{9b^2}{16} = ab,$$

или

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{3b}{4}\right)^2 = ab,$$

или

$$\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2 = ab.$$

Логарифмируя это равенство, находим

$$\log \frac{2a+3b}{4} = \frac{\log a + \log b}{2}.$$

373. Поскольку a, b и c — последовательные члены геометрической прогрессии, то $b^2 = ac$.

Логарифмируем обе части этого равенства по основанию N

$$2 \log_N b = \log_N a + \log_N c,$$

или

$$\log_N b - \log_N a = \log_N c - \log_N b.$$

Преобразуем правую часть доказываемого равенства

$$\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}=\frac{\dfrac{1}{\log_N a}-\dfrac{1}{\log_N b}}{\dfrac{1}{\log_N b}-\dfrac{1}{\log_N c}}=$$

$$=\frac{\log_N b-\log_N a}{\log_N c-\log_N b}\,\frac{\log_N c}{\log_N a}=1\cdot\frac{\log_N c}{\log_N a}=\frac{\log_a N}{\log_c N}.$$

374. Поскольку

$$a^l=(a^k)^{\frac{l}{k}},$$

то

$$\log_{a^k} a^l=\frac{l}{k}.$$

Ответ. $\frac{l}{k}$.

375. Приведя все логарифмы к одному основанию, получим

$$y=\frac{1}{\log_N a}\,\frac{1}{\log_N b}+\frac{1}{\log_N b}\,\frac{1}{\log_N c}+\frac{1}{\log_N c}\,\frac{1}{\log_N a}=$$

$$=\frac{\log_N c+\log_N a+\log_N b}{\log_N a\log_N b\log_N c}=\frac{\log_N (abc)}{\log_N a\log_N b\log_N c},$$

или

$$y=\frac{\dfrac{1}{\log_{abc} N}}{\dfrac{1}{\log_a N}\,\dfrac{1}{\log_b N}\,\dfrac{1}{\log_c N}}=\frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc} N}.$$

376. Первое решение. Пусть

$$\log_{a_1} x=\alpha_1,\ \log_{a_2} x=\alpha_2,\ \log_{a_3} x=\alpha_3,\ \ldots,\ \log_{a_n} x=\alpha_n,$$

откуда

$$x=a_1^{\alpha_1},\ x=a_2^{\alpha_2},\ x=a_3^{\alpha_3},\ \ldots,\ x=a_n^{\alpha_n},$$

или

$$x^{\frac{1}{\alpha_1}}=a_1,\ x^{\frac{1}{\alpha_2}}=a_2,\ x^{\frac{1}{\alpha_3}}=a_3,\ \ldots,\ x^{\frac{1}{\alpha_n}}=a_n.$$

Перемножив последние n равенств, получим

$$x^{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}=a_1a_2a_3\ldots a_n,$$

откуда

$$x=(a_1a_2a_3\ldots a_n)^{\dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}}.$$

Логарифмируя обе части последнего равенства по основанию $a_1a_2a_3 \dots a_n$, получаем

$$\log_{a_1a_2a_3 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x}+\frac{1}{\log_{a_2} x}+\dots+\frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

Второе решение.

$$\log_{a_1a_2a_3 \dots a_n} x = \frac{1}{\log_x (a_1a_2a_3 \dots a_n)} = \frac{1}{\log_x a_1+\log_x a_2+\log_x a_3+\dots+\log_x a_n} = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x}+\frac{1}{\log_{a_2} x}+\dots+\frac{1}{\log_{a_n} x}}.$$

377. Первое решение. Пусть

$$\log_a x = m, \quad \log_b x = n,$$

откуда

$$x = a^m, \quad x = b^n,$$

или

$$x^{\frac{1}{m}} = a, \quad x^{\frac{1}{n}} = b. \tag{1}$$

Из последних двух равенств получаем

$$x^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} = \frac{a}{b}.$$

Логарифмируя обе части этого равенства при основании $\frac{a}{b}$, получаем

$$\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)\log_{\frac{a}{b}} x = 1;$$

отсюда

$$\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{1}{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}.$$

Но так как из (1) следует, что

$$\frac{1}{m}\log_a x = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n}\log_b x = 1,$$

или

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\log_a x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{\log_b x},$$

то

$$\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_a x}-\frac{1}{\log_b x}} = \frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_b x - \log_a x}.$$

Второе решение.

$$\log_{\frac{a}{b}} x=\frac{1}{\log_x \frac{a}{b}}=\frac{1}{\log_x a-\log_x b}=\frac{1}{\frac{1}{\log_a x}-\frac{1}{\log_b x}}=$$

$$=\frac{\log_a x\cdot\log_b x}{\log_b x-\log_a x}.$$

378. Имеем

$$c=a_1a_2\ldots a_n=a\cdot aq\ldots(aq^{n-1})=a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Далее,

$$\log_c b=\frac{\log_a b}{\log_a c}=\frac{A}{n+\frac{n(n-1)}{2}\log_a q}.$$

Но так как

$$\log_a q=\frac{\log_b q}{\log_b a}=\frac{\log_a b}{\log_q b}=\frac{A}{B},$$

поэтому

$$\log_c b=\frac{2A\cdot B}{2nB+n(n-1)A}.$$

379. Преобразуем правую часть доказываемого равенства. Имеем

$$-\log_3\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n\text{ раз}}=-\log_3\log_3 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=$$

$$=-\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^n=-n\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=n,$$

что и требовалось доказать.

380. Имеем (см. задачу 365)

$$\log_{\sin x}\cos x=\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}. \qquad (1)$$

Учитывая (1), перепишем заданное в условии уравнение так:

$$\log_{\cos x}\sin x+\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}=2.$$

Но если сумма двух взаимно обратных чисел равна двум, то каждое из них равно единице. Следовательно,

$$\log_{\cos x}\sin x=1,\quad \sin x=\cos x,\quad \operatorname{tg} x=1$$

и

$$x=2\pi k+\frac{\pi}{4},\quad \text{где}\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Заметим, что мы взяли двойной период для тангенса; это объясняется тем, что если $x=\pi k+\frac{\pi}{4}$, то при $k=2n$ и $\sin x>0$, и $\cos x>0$, а при $k=2n+1$ и $\sin x<0$, и $\cos x<0$, а последнее не может быть, так как $\sin x$ и $\cos x$ в данном уравнении должны быть только положительными.

Отв. $2\pi k+\frac{\pi}{4}$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

381. Так как $x+1>0$, то данное уравнение равносильно такому:

$$2\log_2(x+1)+\log_2(x+1)=6,$$

или

$$\log_2(x+1)=2,$$

откуда $x+1=2^2=4$ и $x=3$.

Отв. 3.

382. Перейдя в уравнении к логарифмам по основанию 10, получим

$$1+\frac{\lg\left(\frac{4-x}{10}\right)}{\lg x}=(\lg\lg n-1)\frac{1}{\lg x}.$$

Отсюда после простых преобразований придем к уравнению

$$\lg\left(x\frac{4-x}{10}\right)=\lg\frac{\lg n}{10}.$$

После потенцирования будем иметь

$$x^2-4x+\lg n=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-\lg n}.$$

Должно быть $4-\lg n\geqslant 0$, т. е. $\lg n\leqslant 4$. Из условия ясно, что $\lg n>0$, $x>0$, $x\neq 1$, $n>1$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

1) Если $1<n<10^4$ и $n\neq 10^3$, то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1=2+\sqrt{4-\lg n}\quad\text{и}\quad x_2=2-\sqrt{4-\lg n}.$$

2) Если $n=10^3$, то имеется лишь один корень $x=3$.

3) Если $n=10^4$, получаем также один корень $x=2$.

4) Если, наконец, $n>10^4$, то корней нет.

383. Заданное уравнение равносильно такому:

$$b^x=\log_a c. \qquad (1)$$

Рассмотрим четыре возможных случая.

1) Если $c>1$ и $a>1$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\log_b\log_a c.$$

2) Если $0<a<1$ и $0<c<1$, то уравнение имеет такое же единственное решение, как в первом случае.

3) Если $a>1$ и $c\leqslant 1$, то нет решения, так как в этом случае $\log_a c\leqslant 0$, что противоречит уравнению (1).

4) Если $a<1$ и $c\geqslant 1$, то также нет решения, поскольку и в этом случае $\log_a c\leqslant 0$.

384. Так как

$$\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b},$$

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \text{и} \quad \log_c x=\frac{\log_a x}{\log_a c},$$

то данное уравнение принимает вид

$$\left(1+\frac{1}{\log_a c}\right)\log_a x\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b}=\frac{\log_a^2 x\cdot\log_a x}{\log_a b\cdot\log_a c},$$

откуда

$$\log_a x\,(\log_a x-\log_a c-1)=0.$$

Это уравнение разбивается на два уравнения:

1) $\log_a x=0$, откуда $x_1=1$,

2) $\log_a x-\log_a c-1=0$, или $\log_a\frac{x}{c}=1$, откуда $x_2=ac$.

Ответ. 1, ac.

385. Имеем

$$\lg(kx)=2\lg(x+1),$$

откуда

$$(x+1)^2=kx,$$

или

$$x^2+(2-k)x+1=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$x_{1,2}=\frac{k}{2}-1\pm\frac{\sqrt{k^2-4k}}{2}. \qquad (1)$$

Для того чтобы корни были действительными, необходимо, чтобы k было не меньше 4 или отрицательно.

1) Если $k=4$, то $x=1$.

2) Если $k>4$, то $x_1x_2=1>0$ и $x_1+x_2=k-2>4-2>0$. Следовательно, уравнение имеет два положительных корня.

3) Если $k<0$, то $x_1x_2=1>0$ и $x_1+x_2=k-2<0$, оба корня отрицательны.

Для существования $\lg(x+1)$ должно быть $x+1>0$. Имеем (см. (1))

$$x_1+1=\frac{k}{2}-\frac{\sqrt{k^2-4k}}{2}<0$$

как сумма двух отрицательных величин. Следовательно, x_1 не является корнем уравнения.

Выражение

$$x_2+1=\frac{k}{2}+\frac{\sqrt{k^2-4k}}{2}>0,$$

поскольку $k<0$. Так как $x_2<0$ и $k<0$, то $kx>0$, а поэтому существует и $\lg kx$.

Итак, данное уравнение имеет только один корень, если $k=4$ или $k<0$.

386. Имеем

$$\log_2|1-x|=3,$$

откуда

$$|1-x|=8.$$

Если $x<1$, то $1-x=8$ и $x_1=-7$.
Если же $x>1$, то $x-1=8$ и $x_2=9$.
Ответ. -7 или 9.

387. Поделив обе части уравнения на $\sqrt[x]{9}$, получим

$$\left(\sqrt[x]{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt[x]{\frac{2}{3}}\right)-1=0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\sqrt[x]{\frac{2}{3}}$, получаем

$$\sqrt[x]{\frac{2}{3}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt[x]{\frac{2}{3}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (1)$$

Преобразуем первое из равенств (1)

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x=\frac{2}{3}.$$

Логарифмируя обе части этого уравнения по основанию $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, получаем

$$x=\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{2}{3}.$$

Второе равенство не имеет места ни при каком значении x.

Ответ. $\log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\frac{2}{3}$.

388. Областью определения левой части уравнения являются $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $x>0$, т. е. $0<x\leqslant 1$.

Областью определения правой части уравнения является $x\geqslant 3$.

Так как неравенства $0<x\leqslant 1$ и $x\geqslant 3$ противоречивы, то заданное уравнение не имеет решений.

389. Из второго уравнения системы получаем $y=x^{-2}$. Тогда первое уравнение перепишется так:

$$x^{x+y}=x^{-2(x-y)}.$$

Это равенство возможно в трех случаях:

1) $x_1=1$, тогда $y_1=x_1^{-2}=1$;

2) $x_2=-1$, тогда $y_2=x_2^{-2}=1$;

3) $x \neq \pm 1$, тогда $x+y=-2(x-y)$, или $y=3x$ и, учитывая второе уравнение системы, имеем $3x^3=1$.

Следовательно,

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \qquad y=\sqrt[3]{9}.$$

Итак,

$$x_1=y_1=1; \quad x_2=-1, \quad y_2=1; \quad x_3=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \qquad y_3=\sqrt[3]{9}.$$

390. Приведем все логарифмы к основанию 2, тогда заданная система принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{\log_2 12}(\log_2 x+\log_2 y)=\log_2 x, \\ \log_2 x \cdot \dfrac{\log_2(x+y)}{\log_2 3}=3\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}. \end{cases} \tag{1}$$

Так как $x \neq 1$ (в противном случае левая часть первого уравнения исходной системы не имела бы смысла), то $\log_2 x \neq 0$ и систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=\log_2 12, \\ \log_2(x+y)=3. \end{cases}$$

Потенцируя, получаем

$$xy=12, \quad x+y=8,$$

откуда

$$x_1=6, \quad y_1=2; \quad x_2=2, \quad y_2=6.$$

391. Так как

$$3^{\log_3 y}=y,$$

то заданная система принимает вид

$$\begin{cases} \log_5 x+y=7, \\ x^y=5^{12}. \end{cases} \tag{1}$$

Потенцируя первое уравнение системы (1), получим $x \cdot 5^y=5^7$, откуда

$$x=5^{7-y}. \tag{2}$$

Подставляя x из уравнения (2) во второе уравнение системы (1), получаем уравнение

$$5^{12+y^2-7y}=1,$$

имеющее корни

$$y_1=4, \quad y_2=3.$$

В результате мы приходим к двум решениям:

$$x_1=125, \quad y_1=4; \quad x_2=625, \quad y_2=3.$$

392. Пусть $\dfrac{q}{p}=\alpha$. Если $\alpha=1$, т. е. $p=q$, то системе удовлетворяет любая пара равных положительных чисел. Будем поэтому

считать $\alpha \neq 1$. Из второго уравнения получаем $x=y^{\alpha}$. Логарифмируя первое уравнение и используя это равенство, будем иметь

$$y \lg y\,(\alpha - y^{\alpha-1}) = 0.$$

Так как $y>0$, то либо $\lg y=0$, либо $\alpha = y^{\alpha-1}$. В первом случае получаем $x_1=1$, $y_1=1$; во втором случае $x_2=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, $y_2=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Обе пары чисел удовлетворяют и исходной системе.

Отв. $x_1=y_1=1$; $x_2=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, $y_2=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

393. Вначале заметим, что должно быть

$$x>0,\ y>0,\quad x\neq 1,\ y\neq 1.$$

Так как $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$, то первое уравнение системы принимает вид

$$2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0,$$

откуда

$$\log_y x = 2 \quad \text{или} \quad \log_y x = \frac{1}{2},$$

т. е.

$$x=y^2 \quad \text{или} \quad y=x^2.$$

Второе уравнение системы при $y=x^2$ принимает вид

$$x^2 + x - a - a^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-1 \pm (1+2a)}{2},$$

т. е. $x_1=a$, $x_2=-a-1$.

1) Если $a>0$, $a\neq 1$, то $x_1=a$, $y_1=a^2$, а $x=-1-a$ не дает решения.

2) Если $-1-a>0$, $-1-a\neq 1$, т. е. $a<-1$, но $a\neq -2$, то $x_2=-1-a$, $y_2=(1+a)^2$ являются решением данной системы, а $x=a$ не дает решения.

3) Если $-1\leqslant a\leqslant 0$, то $x=a$ и $x=-1-a$ не дает решения данной системы.

Ввиду симметричности уравнений системы относительно x и y, поменяв местами x и y, мы придем к аналогичным выводам.

Итак, если $a>0$, $a\neq 1$, то система имеет два решения: $x_1=a$, $y_1=a^2$ и $x_2=a^2$, $y_2=a$.

Если $a<-1$, но $a\neq -2$, то система имеет также два решения:

$$x_1=-1-a,\quad y_1=(1+a)^2;\quad x_2=(1+a)^2,\quad y_2=-1-a.$$

Если $-1\leqslant a\leqslant 0$, то система не имеет решений.

394. Логарифмируя первое уравнение по основанию a, найдем

$$x + y\log_a b = 1 + \log_a b. \qquad (1)$$

Во втором уравнении перейдем к логарифмам по основанию a, тогда

$$2\log_a x = -\frac{\log_a y}{\log_a b}\,\frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} = -2\log_a y.$$

Отсюда $x=\frac{1}{y}$. Подставив $y=\frac{1}{x}$ в (1), получим уравнение

$$x^2 - x(1+\log_a b)+\log_a b = 0,$$

имеющее корни

$$x_1 = \log_a b \quad \text{и} \quad x_2 = 1.$$

Следовательно, $y_1 = \log_b a$, $y_2 = 1$.
Итак,

$$x_1 = \log_a b, \quad y_1 = \log_b a;$$
$$x_2 = 1, \quad y_2 = 1.$$

Глава VIII

КОМБИНАТОРИКА И БИНОМ НЬЮТОНА

395. В числе 50! имеется только 10 сомножителей, которые кратны пяти, а именно:

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 40,\ 45,\ 50,$$

В каждое из чисел 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40 и 45 пятерка входит сомножителем один раз, а в числа 25 и 50 — два раза.

Итак, если произведение 50! разложить на простые множители, то среди них будет двенадцать пятерок.

Число 2 содержится множителем в произведении 50! значительно больше 12 раз, так как только $2\cdot4\cdot8\cdot16\cdot32 > 2^{12}$. Следовательно, число нулей в 50! определяется числом пятерок, так как при умножении простых чисел только произведение пяти на два дает число, оканчивающееся на нуль.

Отв. Число 50! имеет на конце 12 нулей.

396. Имеем

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_i!} = \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!}\,\frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!}\times$$
$$\times\,\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdots\frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1})!}{k_i!\,(n-k_1-k_2-\ldots-k_i)!} =$$
$$= C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2}\ldots C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1}}^{k_i}.$$

Так как C_m^p есть целое число, то и произведение

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2}\ldots C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1}}^{k_i}$$

есть целое число, что и требовалось доказать.

397. Данный ряд сравним с правой частью формулы бинома Ньютона

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2} + \ldots$$

Очевидно, чтобы из этого разложения получить A, надо положить

$$x=1, \quad a=1, \quad n=10^4.$$

Следовательно, сумма членов ряда A равна $2^{10^4}=2^{10\,000}$.

Логарифмируя, видим, что характеристика логарифма этого числа равна 3010, поэтому число $2^{10\,000}$ имеет 3011 цифр.

Отв. 3011 цифр.

398. Имеем

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n$$

и

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Перемножим почленно эти два равенства. В левой части получим $(1+x)^{2n}$. Коэффициент при x^n в разложении $(1+x)^{2n}$ равен C_{2n}^n.

При перемножении правых частей рассматриваемых тождеств получится многочлен $2n$-й степени.

Легко убедиться, что коэффициент при x^n в этом многочлене равен

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

Поскольку правая и левая части рассматриваемого произведения тождественно равны, то должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях x, в том числе и при x^n. Поэтому

$$1^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Отв. C_{2n}^n.

399. Доказываемое равенство равносильно

$$1 + (n+1) + \frac{n+1}{2}C_n^1 + \frac{n+1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{n+1}{m+1}C_n^m + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n+1}{n}C_n^{n-1} + 1 = 2^{n+1}. \qquad (1)$$

Но так как

$$\frac{n+1}{m+1}C_n^m = \frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1},$$

то левая часть доказываемого равенства (1) равна

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_{n+1}^{m+1} + \ldots + C_{n+1}^n + 1 = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

400. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 можно составить A_8^4 четырехзначных чисел, считая и те, которые начинаются нулем.

Поскольку все 8 цифр равноправны, то нулем начинаются $\frac{1}{8} A_8^4$ чисел. Следовательно, всего четырехзначных чисел $\frac{7}{8} A_8^4$.

Число четырехзначных чисел, не содержащих единицу и начинающихся цифрой, отличной от нуля, равно

$$A_7^4 - \frac{1}{7} A_7^4 = \frac{6}{7} A_7^4.$$

Итак, всего четырехзначных чисел, каждое из которых содержит единицу,

$$\frac{7}{8} A_8^4 - \frac{6}{7} A_7^4.$$

401. Для определенности пусть A, B и C получают по 4 предмета в такой последовательности: A получает 4 предмета, потом из оставшихся восьми предметов B получает 4 предмета, а C получает оставшиеся 4 предмета.

Итак, A может получить столько различных наборов из четырех предметов, сколько можно составить сочетаний из 12 по 4 в каждом, а B может получить столько различных наборов, сколько можно составить сочетаний из восьми по 4, а C получает каждый раз оставшиеся 4 предмета. Таким образом, число способов распределения наборов из четырех предметов из имеющихся 12 предметов равно произведению

$$C_{12}^4 \cdot C_8^4 = 34\,650.$$

Отв. 34 650.

402. Пронумеруем клетки последовательно порядковыми числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Поместим в четных клетках гласные буквы. Таких всевозможных расположений гласных букв по четным ящикам 4!. Каждому из этих расположений гласных букв будет соответствовать 4! расположений по нечетным клеткам согласных букв. Таким образом, число различных расположений гласных и согласных букв, если гласные помещаются в четных клетках, а согласные — в нечетных, равно произведению $4! \cdot 4!$. Если же мы будем помещать согласные в четных клетках, а гласные — в нечетных, то таких всевозможных расположений также будет $4! \cdot 4!$.

Итак, всего различных расположений букв

$$2(4! \cdot 4!) = 1152.$$

Отв. 1152.

403. Расположим все белые шары в ряд. Для черных шаров остается $(p+1)$ место: $(p-1)$ место между каждыми двумя белыми шарами, одно место правее всех белых и одно место левее всех белых. Отсюда ясно, что число способов, которыми можно разместить в ряд шары, равно C_{p+1}^q.

Отв. C_{p+1}^q.

404. Трехзначное число имеет вид abc. При этом каждая из цифр a, b и c может принимать независимо друг от друга все

значения от 1 до 9. Поэтому число искомых трехзначных чисел равно $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$.

Отв. 729.

405. Очевидно, что всякое число, являющееся делителем числа $2^5 \cdot 3^2$, будет иметь вид $2^\alpha \cdot 3^\beta$, где α может принимать значения от 0 до 5 (включительно), а β — от 0 до 2 (включительно). Таким образом, α может принимать шесть значений, а β — три значения. Поскольку эти значения друг от друга не зависят, то при этом $2^\alpha 3^\beta$ принимает $6 \cdot 3 = 18$ значений. Следовательно, число искомых делителей равно 18.

Аналогичными рассуждениями легко убедиться, что число делителей $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, равно

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\ldots(1+\alpha_k).$$

Отв. 18.

406. Поскольку число наполненных ящиков равно m и так как в каждый наполненный ящик вложено по k ящиков, то число вложенных ящиков равно mk. Но так как первый ящик никуда не вложен, то всего ящиков $mk+1$. Следовательно, число пустых ящиков равно $(mk+1)-m$.

Отв. $mk+1-m$.

407. Всего число перестановок из n элементов, включая те, у которых a и b стоят рядом, равно $n!$. Исключим из данных n элементов элементы a и b и образуем из остальных $(n-2)$ элементов всевозможные перестановки. Их будет $(n-2)!$. Присоединим к каждой из этих перестановок два элемента a и b так, чтобы они оказались рядом. Это, очевидно, можно сделать $2(n-1)$ способами (множитель 2 здесь связан с тем, что a и b можно переставить местами). Таким образом, число перестановок, в которых a и b стоят рядом, равно $2(n-2)!(n-1) = 2(n-1)!$, а интересующее нас число равно

$$n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2).$$

408. Первое решение. Очевидно, что произведение двух чисел кратно трем в том и только в том случае, когда хотя бы один сомножитель кратен трем.

Выберем из чисел 1, 2, 3, ..., 100 все числа, кратные трем. Таких чисел 33. Остальные 67 чисел не кратны трем.

Число произведений, полученных из сомножителей, кратных трем, равно C_{33}^2. Число произведений, кратных трем, полученных из сомножителей, один из которых не кратен трем, равно $67 \cdot 33$.

Итак, искомое число парных произведений, кратное трем, равно

$$C_{33}^2 + 67 \cdot 33 = 2739.$$

Второе решение. Число всех парных произведений равно C_{100}^2, а число парных произведений, не кратных трем, равно C_{67}^2.

Поэтому число парных произведений, кратных трем, равно $C_{100}^2 - C_{67}^2 = 4950 - 2211 = 2739$.

Отв. 2739.

409. Всего можно составить C_{10}^3 различных групп офицеров (из трех офицеров каждая) и C_{20}^7 различных групп солдат (из семи солдат каждая).

Поскольку каждой возможной группе, состоящей из офицеров, можно дать любую возможную группу, состоящую из солдат, то число разведывательных групп равно

$$C_{10}^3 \cdot C_{20}^7.$$

410. Выберем одну заглавную букву, этот выбор можно сделать k способами. Затем из m гласных выберем μ букв, это можно сделать C_m^μ способами. Наконец, выберем ν согласных, что можно сделать C_n^ν способами. Итак, выбор необходимых букв для составления слова можно сделать $kC_m^\mu C_n^\nu$ способами. Произведя указанный выбор, поставим заглавную букву на первое место, тогда из прочих $\mu+\nu$ строчных букв можно составить $(\mu+\nu)!$ перестановок, каждая такая перестановка дает новое слово.

Итак, всего можно составить

$$kC_m^\mu C_n^\nu (\mu+\nu)!$$

различных слов.

Отв. $kC_m^\mu C_n^\nu (\mu+\nu)!$.

411. Поскольку в колоде карт 4 туза и 32 карты — не тузы, то всякое деление колоды, указанное в условии, равносильно извлечению 16 не тузов из 32 и двух тузов из четырех. Первое извлечение можно осуществить C_{32}^{16} способами, а второе — C_4^2 способами. Так как каждое извлечение 16 не тузов можно скомбинировать с любым извлечением двух тузов, то общее число способов указанного деления колоды равно $C_{32}^{16}C_4^2$.

Отв. $C_{32}^{16}C_4^2$.

412. Занумеруем окружности (например, в порядке возрастания радиуса)

$$1, 2, \ldots, k.$$

Занумеруем также лучи (например, по часовой стрелке)

$$1, 2, \ldots, l.$$

Точку пересечения m_i-й окружности с n_i-м лучом обозначим (m_i, n_i).

Пусть $(m_1, n_1)(m_2, n_2)\ldots(m_s, n_s)$ — один из таких наборов. Так как никакие две точки не лежат на одной окружности, то $m_1, m_2, \ldots, m_s$ — некоторая выборка из $1, 2, \ldots, k$.

Аналогично $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — некоторая выборка из $1, 2, \ldots, l$. Так как порядок точек в наборе нас не интересует, то искомое число равно $C_k^s A_l^s$.

Отв. $C_k^s A_l^s$.

413. Первое решение. Так как каждые две точки определяют прямую, причем прямые AB и BA есть одна и та же прямая, то число прямых равно $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$.

Второе решение. Так как из каждой точки можно провести $(n-1)$ прямую, то всего прямых $n(n-1)$, если считать прямые AB и BA различными, но так как AB и BA есть одна и та же прямая, то число прямых равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Отв. $\frac{n(n-1)}{2}$.

414. При $n=1$ закон верен.

Действительно, одна прямая рассекает плоскость на две части, так как $1+\frac{1(1+1)}{2}=2$.

Предположим, что закон верен при $n=k$, т. е. число частей, на которые рассекается плоскость прямыми, равно

$$1+\frac{k(k+1)}{2}.$$

Далее проведем еще одну прямую так, чтобы она не была параллельна ни одной из взятых ранее k прямых и не проходила бы через точку пересечения каких-либо двух из них; $(k+1)$-я прямая пересечет все ранее взятые прямые в k различных точках и, следовательно, пройдет по $(k+1)$ частям плоскости, каждую из которых разделит на две части. Следовательно, число частей плоскости увеличится на $k+1$.

Итак, $(k+1)$ прямых делит плоскость на

$$(k+1)+1+\frac{k(k+1)}{2}=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

частей. Таким образом, закон оказался верным и при $n=k+1$.

Следовательно, он верен при любом n.

415. Первое решение. Известно, что две ладьи могут бить друг друга, если они находятся либо в одном вертикальном, либо в одном горизонтальном ряду полей шахматной доски. Символом (i, j) будем обозначать поле, находящееся на пересечении i-го горизонтального и j-го вертикального ряда, где для i и j возможны значения 1, 2, ..., 8.

Две ладьи, находящиеся на полях (i, j) и (k, l), не могут бить друг друга в том и только в том случае, если $i\neq k$ и $j\neq l$. Если 8 ладей, расставленных на доске, занимают поля

$$(i_1, j_1),\ (i_2, j_2),\ \ldots,\ (i_8, j_8)$$

и не могут бить друг друга, то среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_8$ не может быть двух равных, так как никакие две ладьи не могут стоять в одном горизонтальном ряду. Следовательно, $i_1, i_2, \ldots, i_8$ есть перестановка из чисел 1, 2, ..., 8. Аналогично установим, что $j_1, j_2, \ldots, j_8$ есть перестановка из тех же чисел. Распо-

ложим символы (i, j) так, чтобы числа $i_1, i_2, \ldots, i_8$ следовали в натуральном порядке

$$(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (8, j_8).$$

Всякой перестановке $j_1, j_2, \ldots, j_8$ соответствует возможное расположение ладей.

Итак, существует $8! = 40\,320$ различных возможных расстановок ладей.

Второе решение. При каждом допустимом расположении ладей в каждом вертикальном и в каждом горизонтальном ряду находится одна и только одна ладья.

Присвоим ладьям (до их расстановки на доске) номера от 1 до 8 включительно.

При любом расположении ладей на k-е место (считая снизу) в том или ином вертикальном ряду будем ставить ладью, имеющую номер k.

Каждое расположение ладей есть соединение элементов (номеров 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8), взятых в порядке их нахождения в вертикальных рядах (считая эти ряды слева направо). Эти соединения представляют собой перестановки из 8 элементов, а поэтому число их равно 8! Следовательно, число различных способов расположения ладей равно $8! = 40\,320$.

Отв. 40 320.

416. Имеем

$$T_k = C_{100}^{k-1} (\sqrt{3})^{k-1}, \quad T_{k+1} = C_{100}^{k} (\sqrt{3})^{k}, \quad T_{k+2} = C_{100}^{k+1} (\sqrt{3})^{k+1}.$$

Согласно условию задачи должно быть

$$T_{k+1} > T_k \quad \text{и} \quad T_{k+1} > T_{k+2},$$

или

$$C_{100}^{k} (\sqrt{3})^{k} > C_{100}^{k-1} (\sqrt{3})^{k-1} \text{ и } C_{100}^{k} (\sqrt{3})^{k} > C_{100}^{k+1} (\sqrt{3})^{k+1}.$$

После упрощений получим

$$\frac{\sqrt{3}}{k} > \frac{1}{101-k}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{100-k} > \frac{\sqrt{3}}{k+1}. \tag{2}$$

Из неравенства (1) получаем

$$k < \frac{101\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1},$$

а из (2)

$$k > \frac{100\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

Но так как оба неравенства должны существовать одновременно, то

$$\frac{100\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} < k < \frac{101\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}. \tag{3}$$

Левая и правая части неравенства (3)—числа нецелые, а разность между ними равна единице. Поэтому существует лишь одно целое число k, удовлетворяющее неравенству (3). Заметив, что $1{,}72 < \sqrt{3} < 1{,}73$, прямым вычислением установим, что

$$64{,}64 > k > 63{,}135.$$

Следовательно, $k = 64$.

Отв. 64.

417. Делителями числа q являются, во-первых, сами числа $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, а также всевозможные их произведения по два, по три и т. д. (эти произведения различны, так как единственным образом можно представить число в виде произведения простых чисел). Таким образом, число делителей равно

$$C_k^0 + C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^k = 2^k.$$

418. Пусть искомые числа x и y. Имеем

$$x + y = 0{,}1xy, \quad \text{или} \quad 10x + 10y = xy.$$

Отсюда получаем

$$x(y - 10) = 10y,$$

а также

$$y(x - 10) = 10x.$$

Перемножив последние два равенства, получим

$$xy(x - 10)(y - 10) = 100xy,$$

или

$$(x - 10)(y - 10) = 100.$$

Поскольку x и y—целые числа, то и разности $(x - 10)$ и $(y - 10)$ должны быть целые числа. Следовательно, задача сводится к разложению числа 100 на два множителя, а так как такое разложение может быть сделано только пятью различными способами, а именно:

$$100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10,$$

то, стало быть, и задача имеет только пять решений:

$$x_1 = 11, \ y_1 = 110; \ x_2 = 12, \ y_2 = 60; \ x_3 = 14, \ y_3 = 35;$$
$$x_4 = 15, \ y_4 = 30; \ x_5 = 20, \ y_5 = 20.$$

Глава IX

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

419. Возведя в куб заданную зависимость, получим

$$x + iy = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$$

Отсюда

$$x = a(a^2 - 3b^2), \quad y = b(3a^2 - b^2),$$

или

$$\frac{x}{a} = a^2 - 3b^2, \quad \frac{y}{b} = 3a^2 - b^2.$$

Сложив последние два равенства, находим

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=4\,(a^2-b^2).$$

420. Имеем

$$|z-1|\leqslant|z+1|.$$

Поэтому

$$|z-1|^2\leqslant|z+1|^2. \qquad (1)$$

Пусть $z=x+iy$, тогда (1) принимает вид

$$(x-1)^2+y^2\leqslant(x+1)^2+y^2.$$

или

$$x^2-2x+1+y^2\leqslant x^2+2x+1+y^2,$$

или

$$-2x\leqslant 2x,$$

откуда

$$x>0.$$

Следовательно, точки находятся в полуплоскости, расположенной правее оси y.

421. Пусть $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$. Имеем

$$z_1+z_2=x_1+x_2+i\,(y_1+y_2), \qquad (1)$$

$$z_1-z_2=x_1-x_2+i\,(y_1-y_2). \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) левая часть доказываемого тождества принимает вид

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=$$
$$=2\left(x_1^2+y_1^2\right)+2\left(x_2^2+y_2^2\right)=2\,(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

422. Уравнение $x^n=1$ имеет корни

$$\alpha_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$.

Очевидно, что

$$\alpha_0=1, \qquad \alpha_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

а

$$\alpha_1^k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}=\alpha_k.$$

Поэтому, положив $\alpha_1=\alpha$, получаем корни в виде

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1}.$$

423. Искомую сумму можно записать так (см. задачу 422):

$$1+\alpha^p+\alpha^{2p}+\ldots+\alpha^{(n-1)p}=1+\alpha^p+(\alpha^p)^2+\ldots+(\alpha^p)^{n-1},$$

где

$$\alpha^p=\cos\frac{2p\pi}{n}+i\sin\frac{2p\pi}{n}.$$

Если p делится на n, то $\alpha^p=1$ и сумма равна n.

Если же p не делится на n, то $\alpha^p \neq 1$ и можно воспользоваться суммой геометрической прогрессии. В этом случае искомая сумма равна

$$\frac{\alpha^{pn}-1}{\alpha^p-1}=0,$$

так как

$$\alpha^{pn}-1=(\alpha^n)^p-1=1-1=0.$$

Отв. Если p делится на n, то искомая сумма равна n, а если p не делится на n, то сумма равна нулю.

424. Первое решение. Пусть

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

тогда

$$z^{142}+\frac{1}{z^{142}}=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{142}+(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{142}=$$

$$=\cos 142\varphi+i\sin 142\varphi+\cos 142\varphi-i\sin 142\varphi=2\cos 142\varphi.$$

Так как $z+\frac{1}{z}=1$, или $z^2-z+1=0$, то

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

Таким образом,

$$z^{142}+\frac{1}{z^{142}}=2\cos\frac{142\pi}{3}=2\cos\frac{4\pi}{3}=-2\cos\frac{\pi}{3}=-1.$$

Второе решение. Так как $z+\frac{1}{z}=1$, то $z^2-z+1=0$, а значит, и $z^3+1=0$; следовательно, $z^3=-1$. Поэтому

$$z^{142}+\frac{1}{z^{142}}=(z^3)^{47}z+\left(\frac{1}{z^3}\right)^{47}\frac{1}{z}=-z-\frac{1}{z}=-1.$$

Отв. -1.

425. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тогда заданное уравнение принимает вид

$$r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+r=0,$$

так как $|z|=r$.

Это уравнение перепишем так:

$$r[(r\cos 2\varphi+1)+ir\sin 2\varphi]=0.$$

Отсюда имеем либо $r=0$, тогда $z=0$, либо

$$(r\cos 2\varphi+1)+ir\sin 2\varphi=0.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin 2\varphi=0,\\ r\cos 2\varphi+1=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Значения φ, равные $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$, удовлетворяют первому уравнению системы (1). Но так как из второго уравнения системы (1) следует, что $\cos 2\varphi < 0$, то заключаем, что φ может принимать только значения $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{вообще } \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ и $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\text{вообще } \frac{3\pi}{2}+\pi k\right)$.

Подставляя эти значения φ во второе уравнение системы (1), убеждаемся, что как при $\varphi=\frac{\pi}{2}$, так и при $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ получаем $r=1$.

Итак,

$$z_2=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i$$

и

$$z_3=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-i.$$

Таким образом, данное уравнение удовлетворяется только тремя значениями z, а именно: 0, i и $-i$.

Отв. 0, i, $-i$.

426. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, тогда

$$z^2=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$$

и

$$z^2+1=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+1=(r^2\cos 2\varphi+1)+ir^2\sin 2\varphi.$$

Поскольку модуль комплексного числа $a+bi$ равен $\sqrt{a^2+b^2}$, то

$$|z^2+1|=\sqrt{(r^2\cos 2\varphi+1)^2+(r^2\sin 2\varphi)^2}=\sqrt{r^4+2r^2\cos 2\varphi+1}. \quad (1)$$

Далее,

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{z^2+1}{z}\right|=\frac{|z^2+1|}{|z|}=\frac{|z^2+1|}{r}.$$

Но так как по условию $\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$, то

$$\frac{|z^2+1|}{r}=1,$$

откуда

$$|z^2+1|=r. \quad (2)$$

В силу (1) и (2) имеем

$$r^4+2r^2\cos 2\varphi+1=r^2, \quad \text{или} \quad r^4+r(2\cos 2\varphi-1)+1=0.$$

Отсюда

$$r^2=\frac{1-2\cos 2\varphi\pm\sqrt{(1-2\cos 2\varphi)^2-4}}{2}. \quad (3)$$

Поскольку мы ищем наибольшее значение r^2, то перед корнем берем знак плюс.

Очевидно, что r^2 принимает наибольшее значение, когда $\cos 2\varphi = -1$, т. е. при $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Подставив это значение φ в (3), получим $r^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $r = |z| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Глава X

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

427. Имеем

$$a^3 + b^3 - c^3 = ac^2 + bc^2 - c^3,$$

или

$$a^3 + b^3 = (a+b)\,c^2,$$

или

$$a^2 - ab + b^2 - c^2 = 0,$$

т. е.

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Отсюда следует, что $\angle C = 60°$.

Второе условие задачи перепишем так:

$$2 \sin A \sin B = \frac{3}{2},$$

или

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = \frac{3}{2},$$

или

$$\cos(A-B) - \cos 120° = \frac{3}{2}.$$

Отсюда

$$\cos(A-B) = 1, \quad \text{т. е. } A - B = 0 \quad \text{и} \quad A = B = 60°.$$

Итак, треугольник равносторонний.

428. Пусть (рис. 4)

$$\angle O_1MO_2 = \alpha, \quad \angle O_2MO = \beta, \quad \angle O_1MO = \gamma.$$

Из треугольника O_1MO_2 имеем

$$O_1O_2 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\alpha}.$$

Проводим O_1D параллельно ABC до встречи с O_2C в точке D. Из прямоугольного треугольника O_1O_2D следует

$$O_1D^2 = O_1O_2^2 - O_2D^2,$$

откуда

$$O_1D = BC = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\alpha - (R_2 - R_1)^2},$$

или

$$BC = 2\sqrt{R_1R_2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично находим

$$AC = 2\sqrt{RR_2}\sin\frac{\beta}{2}, \qquad AB = 2\sqrt{RR_1}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Подставив найденные значения BC, AC и AB в равенство

$$AC = AB + BC,$$

получим искомую зависимость

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{R_1}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{R_2}}.$$

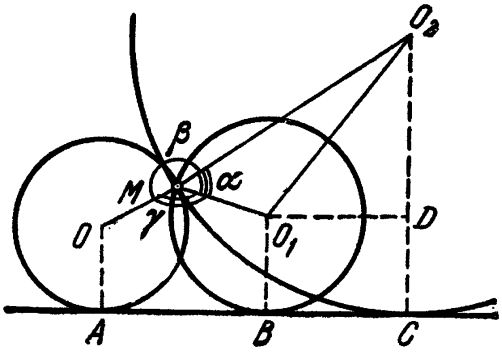

Рис. 4.

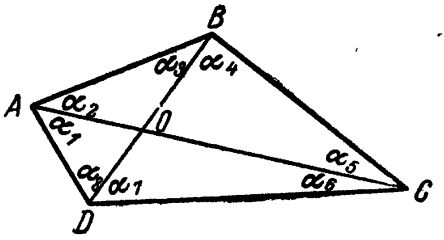

Рис. 5.

429. Используем теорему синусов для треугольников OAD, OAB, OBC, OCD (рис. 5):

$$\frac{OA}{OD} = \frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_1}, \quad \frac{OB}{OA} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}, \quad \frac{OC}{OB} = \frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5}, \quad \frac{OD}{OC} = \frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_7}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{\sin\alpha_2\sin\alpha_4\sin\alpha_6\sin\alpha_8}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3\sin\alpha_5\sin\alpha_7} = 1.$$

430. Так как в $\triangle ACB$

$$AK=CK=KB,$$

то

$$\angle ACB=90°.$$

Из треугольника ADK имеем

$$\operatorname{tg}\angle ADK=\frac{AK}{DK}=\frac{0{,}5a}{a}=0{,}5.$$

Из треугольника AEK следует

$$\operatorname{tg}\angle AEK=\frac{AK}{EK}=\frac{0{,}5a}{1{,}5a}=\frac{1}{3}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}(\angle ADK+\angle AEK)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Отсюда

$$\angle ADK+\angle AEK=45°,$$

а следовательно,

$$\angle ADB+\angle AEB=90°.$$

Итак, $\angle ACB+\angle ADB+\angle AEB=180°$ (рис. 6).

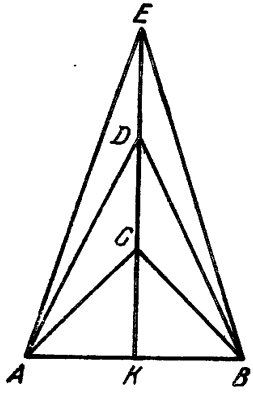

Рис. 6.

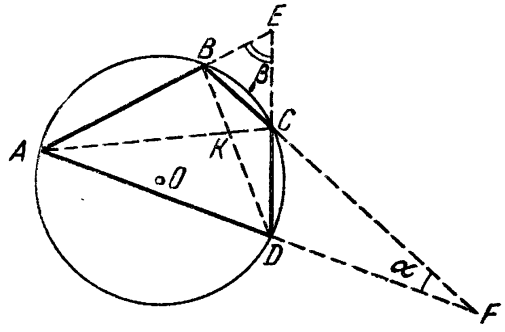

Рис. 7.

431. Первое решение. Обозначим в радианах (рис. 7)

$$\angle AKB=\gamma,\quad \smile AB=x,\quad \smile BC=v,\quad \smile CD=y,\quad \smile AD=u.$$

Так как по условию

$$\angle F=\alpha,\quad \angle E=\beta,$$

то можно составить две системы:

$$\begin{cases} x+y=2\gamma, \\ x-y=2\alpha \end{cases} \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} u+v=2\pi-2\gamma, \\ u-v=2\beta. \end{cases} \tag{2}$$

Из системы (1) следует

$$x=\gamma+\alpha, \quad y=\gamma-\alpha.$$

Из системы (2) следует

$$u=\pi-\gamma+\beta, \quad v=\pi-\gamma-\beta.$$

$$\angle ABC=\frac{u+y}{2}=\frac{\pi-\alpha+\beta}{2} \text{ (радианов)},$$

$$\angle ADC=\pi-\angle ABC=\frac{\pi+\alpha-\beta}{2} \text{ (радианов)}.$$

Аналогично

$$\angle BAD=\frac{v+y}{2}=\frac{\pi-\alpha-\beta}{2} \text{ (радианов)},$$

$$\angle BCD=\pi-\angle BAD=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2} \text{ (радианов)}.$$

Второе решение. Имеем

$$\angle ADC+\angle BCD=\pi+\alpha,$$
$$\angle ABC+\angle BCD=\pi+\beta,$$
$$\angle BAD+\angle BCD=\pi,$$
$$\angle ABC+\angle ADC=\pi.$$

Решив эти четыре уравнения совместно, получим

$$\angle BAD=\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}, \quad \angle ABC=\frac{\pi-\alpha+\beta}{2},$$
$$\angle BCD=\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}, \quad \angle ADC=\frac{\pi+\alpha-\beta}{2}.$$

432. Для удобства будем считать, что одна из окружностей неподвижна, а вторая движется с удвоенной скоростью (так как окружности катятся с одинаковыми скоростями).

Пусть первоначально окружность O_1 касается прямой в точке B, а в момент прикосновения к окружности O — в точке C (рис. 8). Конечное положение центра O_1 обозначим через O_2, а точку касания окружности O с прямой — через A. Проведем прямую O_1O_2K и соединим O с O_1 и с O_2.

Так как $AO=12$ *м*, а $BO_1=3$ *м*, то $OK=9$ *м*.

Из прямоугольного треугольника O_1KO имеем

$$O_1K=\sqrt{OO_1^2-OK^2}=\sqrt{41^2-9^2}=40\ (м).$$

Из прямоугольного треугольника O_2KO находим

$$O_2K=\sqrt{OO_2^2-OK^2}=\sqrt{15^2-9^2}=12\ (м).$$

Окружность O_1 сместилась на расстояние

$$BC=O_1O_2=O_1K-O_2K=40-12=28\ (м).$$

Поскольку окружности катились со скоростями 1 *м* в минуту, то

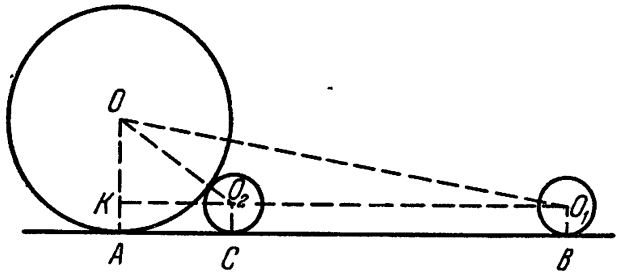

Рис. 8.

их суммарная скорость 2 *м* в минуту и время их движения равно $28:2=14$ *мин*.

433. Обозначим CM через x, высоту треугольника ABE через h_1, высоту треугольника CME через h_2 (рис. 9). По условию

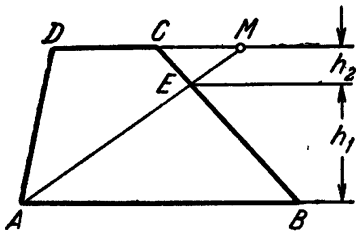

Рис. 9.

$$\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{2}(h_1+h_2),$$

или

$$\frac{2a}{a+b}=\frac{h_1+h_2}{h_1}=1+\frac{h_2}{h_1}. \qquad (1)$$

Но из подобных треугольников ABE и CME имеем

$$\frac{x}{a}=\frac{h_2}{h_1}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{2a}{a+b}=1+\frac{x}{a},\quad \frac{x}{a}=\frac{a-b}{a+b},\quad x=a\,\frac{a-b}{a+b}.$$

Отв. Точка M находится на расстоянии $a\,\dfrac{a-b}{a+b}$ от точки C.

434. Первое решение. Пусть O — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 10).

Соединив O с вершиной C, получим два равнобедренных треугольника AOC и BOC, боковые стороны которых равны $\dfrac{c}{2}$, а углы при вершинах 150° и 30°.

Площадь прямоугольного треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOC и BOC, т. е.

$$\frac{1}{2}\,\frac{c}{2}\,\frac{c}{2}\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\,\frac{c}{2}\,\frac{c}{2}\sin 150^\circ=\frac{c^2}{8}\,.$$

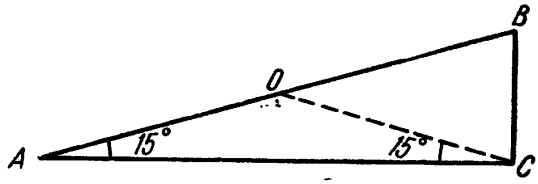

Рис. 10.

Второе решение. Катет $BC=c\sin 15^\circ$, а катет $AC=c\cos 15^\circ$. Площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}\,BC\cdot AC=\frac{1}{2}\,c^2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{c^2}{4}\sin 30^\circ=\frac{c^2}{8}\,.$$

435. Первое решение. Соединим центр круга O (рис. 11) с вершинами A, B, C треугольника ABC и с точками касания D, E, F. Тогда $OA\perp EF$, $OB\perp FD$ и $OC\perp DE$. Двойная площадь прямоугольного треугольника AOE равна

$$AE\cdot OE \quad \text{или} \quad OA\cdot\frac{EF}{2}\,,$$

следовательно,

$$AE\cdot OE=OA\,\frac{EF}{2}\,,$$

откуда

$$EF=2\,\frac{AE\cdot OE}{OA}\,.$$

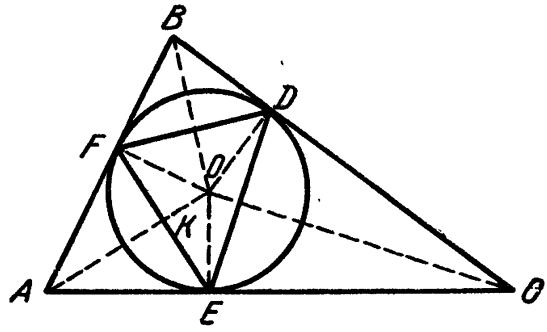

Рис. 11.

Известно, что радиус вписанного круга

$$OE=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}\,,$$

где $a+b+c=2p$.

Из рисунка видим, что

$$AE+CD=b,\quad CD+BF=a,\quad BF+AE=c,$$

следовательно,

$$AE+CD+BF=p$$

и

$$AE=p-a,\quad CD=p-c,\quad BF=p-b.$$

Таким образом,

$$OA=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}},$$

поэтому

$$EF=2\,(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}.$$

Аналогично можно найти FD и ED.

Второе решение. Так как $AE=p-a$ и $\angle OAE=\frac{A}{2}$, где A — угол $\triangle ABC$, то из треугольника AKE, в котором $\angle K=90°$, получим

$$KE=AE\sin\frac{A}{2}.$$

Но

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}.$$

Следовательно,

$$KE=(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}},$$

$$FE=2KE=2\,(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}.$$

436. Известно, что

$$AC^2+AB^2=\frac{BC^2}{2}+2m^2 \qquad (1)$$

(рисунок сделайте сами!).

На основании теоремы синусов имеем

$$\frac{BC}{AC}=\frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{и} \quad \frac{BC}{AB}=\frac{\sin A}{\sin C},$$

откуда

$$AC=BC\,\frac{\sin B}{\sin A} \quad \text{и} \quad AB=BC\,\frac{\sin C}{\sin A}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$BC=\sqrt{\frac{4m^2\sin^2 A}{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}}. \qquad (3)$$

Площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A=\frac{1}{2}BC\,\frac{\sin B}{\sin A}\,BC\,\frac{\sin C}{\sin A}\sin A=$$

$$=\frac{BC^2\sin B\sin C}{2\sin A}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$S=\frac{2m^2\sin A\sin B\sin C}{2\sin^2 B+2\sin^2 C-\sin^2 A}.$$

437. Обозначим корни данного уравнения через x_1, x_2, x_3. Согласно формулам Виета имеем

$$x_1+x_2+x_3=42,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=587,\quad x_1x_2x_3=2730.$$

Площадь треугольника

$$S=\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)},$$

где

$$p=\frac{x_1+x_2+x_3}{2}=21.$$

Следовательно,

$$(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)=(21-x_1)(21-x_2)(21-x_3)=$$
$$=441\cdot 21-441(x_1+x_2+x_3)+21(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1x_2x_3=$$
$$=441\cdot 21-441\cdot 42+21\cdot 587-2730=336.$$

Площадь треугольника $S=\sqrt{21\cdot 336}=84$.

438. Первое решение. Известно, что $BD=l$, $BE=l_1$ (рис. 12).

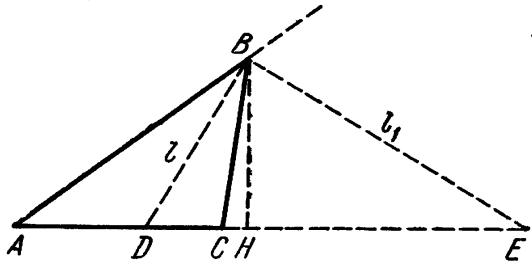

Рис. 12.

Если $DC=x$, то $AD=kx$; если $CE=y$, то $AE=ky$. Так как биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, то треугольник BDE прямоугольный. Из этого треугольника имеем

$$DE^2=BD^2+BE^2,$$

или

$$(x+y)^2=l^2+l_1^2. \qquad (1)$$

Также имеем

$$AE=AD+DC+CE,\quad \text{или}\quad ky=kx+x+y,$$

откуда

$$y=\frac{x(k+1)}{k-1}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$x+\frac{x(k+1)}{k-1}=\sqrt{l^2+l_1^2},$$

откуда

$$x=\frac{(k-1)\sqrt{l^2+l_1^2}}{2k}=DC.$$

Удвоенная площадь треугольника DBE равна $ll_1=DE\cdot BH$, где BH — высота, или

$$ll_1=(x+y)\,BH,$$

или

$$ll_1=\sqrt{l^2+l_1^2}\,BH,$$

откуда

$$BH=\frac{ll_1}{\sqrt{l^2+l_1^2}}.$$

Площадь треугольника ABC

$$S=\frac{AC\cdot BH}{2}=\frac{BH}{2}(AD+DC)=\frac{ll_1}{2\sqrt{l^2+l_1^2}}(kx+x)=$$

$$=\frac{ll_1(k+1)}{2\sqrt{l^2+l_1^2}}\,\frac{(k-1)\sqrt{l^2+l_1^2}}{2k}=\frac{ll_1(k^2-1)}{4k}.$$

Второе решение. В $\triangle DBE$ $\angle B=90°$, а поэтому

$$S_{\triangle DBE}=\frac{1}{2}ll_1. \qquad (1)$$

В то же время

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBE}}=\frac{AC}{DE},\quad \text{или}\quad S_{\triangle ABC}=\frac{AC}{DE}S_{\triangle DBE}. \qquad (2)$$

Как видно из формулы (2), надо найти отношение $\frac{AC}{DE}$.

Из свойства биссектрисы угла в треугольнике ABC следует, что $\frac{AD}{DC}=k$; значит,

$$\frac{AD+DC}{DC}=k+1,\qquad \frac{DC}{AD+DC}=\frac{1}{k+1}.$$

Далее, $\frac{AD+DC+CE}{CE}=k$, поэтому

$$\frac{AD+DC}{CE}=k-1,\qquad \frac{CE}{AD+DC}=\frac{1}{k-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{DC+CE}{AD+DC}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}=\frac{2k}{k^2-1},$$

т. е.

$$\frac{AC}{DE}=\frac{k^2-1}{2k}.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AC}{DE}S_{\triangle DBE}=\frac{k^2-1}{2k}\cdot\frac{ll_1}{2}=\frac{(k^2-1)\,ll_1}{4k}.$$

439. Первое решение. Пусть высоты треугольников AOD и BOC соответственно равны h_1 и h_2, тогда площадь трапеции (рис. 13)

$$S=\frac{AD+BC}{2}(h_1+h_2)=$$

$$=p^2+q^2+\frac{AD\cdot h_2+BC\cdot h_1}{2}.$$

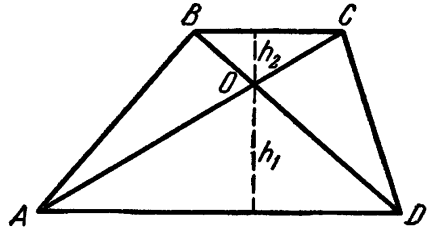

Рис. 13.

Но из подобия треугольников AOD и BOC следует, что

$$AD\cdot h_2=BC\cdot h_1,$$

поэтому

$$S=p^2+q^2+AD\cdot h_2. \qquad (1)$$

Далее имеем, что $\frac{p^2}{q^2}=\frac{AD^2}{BC^2}$, откуда $AD=\frac{BC\cdot p}{q}$ и

$$AD\cdot h_2=\frac{BC\cdot h_2\cdot p}{q}=\frac{2q^2\cdot p}{q}=2pq. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) имеем

$$S=p^2+q^2+2pq=(p+q)^2.$$

Второе решение. Рассмотрим подобные треугольники AOD и BOC. Находим, что их коэффициент подобия равен $\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}=\frac{p}{q}$, т. е.

$$AD:BC=AO:OC=DO:OB=\frac{p}{q}.$$

Так как высоты треугольников BOC и DOC, опущенные из вершины C, совпадают, то

$$S_{\triangle DOC}:S_{\triangle BOC}=DO:OB=\frac{p}{q},$$

т. е.

$$S_{\triangle DOC}=\frac{p}{q}S_{\triangle BOC}=\frac{p}{q}q^2=pq.$$

Аналогично

$$S_{\triangle AOB}=pq.$$

Таким образом, площадь трапеции равна

$$p^2+q^2+pq+pq=(p+q)^2.$$

440. Первое решение. Пусть K — точка пересечения медиан AD и CE (рис. 14). По условию

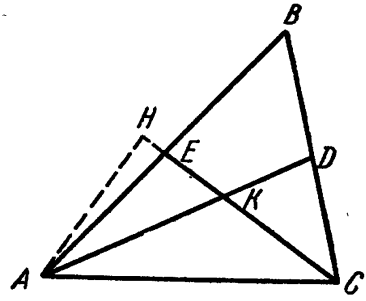

Рис. 14.

$$\angle KAC+\angle KCA=60^\circ,$$

поэтому

$$\angle AKE=\angle KAC+\angle KCA=60^\circ.$$

Проведем высоту AH треугольника AKE. Поскольку

$$\angle HAK=90^\circ-\angle AKE=30^\circ,$$

то

$$HK=\frac{1}{2}AK=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AD=\frac{1}{3}m_a.$$

Поэтому

$$AH=\sqrt{AK^2-HK^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}AD\right)^2-HK^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2-\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2}=\frac{m_a}{\sqrt{3}}.$$

Площадь треугольника ACE равна

$$\frac{1}{2}EC\cdot AH=\frac{1}{2}m_c\frac{m_a}{\sqrt{3}}=\frac{m_am_c}{2\sqrt{3}}.$$

Но по условию $m_a\cdot m_c=\sqrt{3}$, следовательно, площадь треугольника ACE равна $\frac{1}{2}$. Площадь же треугольника ABC, очевидно, вдвое больше площади треугольника AEC $\left(\text{так как } AE=\frac{AB}{2}, \text{ а высота этих треугольников, опущенная из вершины } C, \text{ общая}\right)$, т. е.

$$S_{\triangle ABC}=1.$$

Второе решение. В треугольнике AKC

$$\angle K=120^\circ,\quad AK=\frac{2}{3}m_a,\quad CK=\frac{2}{3}m_c.$$

Следовательно,

$$S_{\triangle AKC}=\frac{1}{2}AK\cdot CK\sin 120^\circ=\frac{2}{9}m_am_c\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{9}\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3},$$

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AKC}=3\cdot\frac{1}{3}=1.$$

Ответ. 1.

441. Первое решение. Обозначим сторону ромба через y, а меньшую его диагональ через x. Следовательно,

$$x^2+a^2=4y^2,$$

откуда

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2} \qquad (1)$$

С другой стороны, мы можем рассматривать x как сторону правильного двенадцатиугольника, вписанного в круг радиуса y, т. е.

$$x=y\sqrt{2-\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$x=a(2-\sqrt{3}), \qquad y=a\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Высота h ромба, т. е. одна из сторон прямоугольника, вписанного в ромб, определится из равенства

$$\frac{xa}{4}=\frac{yh}{2},$$

отсюда

$$h=\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Другая сторона прямоугольника z определяется из равенства

$$z^2=x^2-h^2,$$

откуда

$$z=\frac{a}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})^3}.$$

Искомая площадь

$$S=h\cdot z=\left[\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})\right]^2.$$

Второе решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, в который вписан прямоугольник $MBND$ (рис. 15).

В треугольнике AOB

$$\angle AOB=90^\circ, \qquad \angle BAO=15^\circ, \qquad BO=\frac{a}{2}\operatorname{tg}15^\circ, \qquad \angle ABO=75^\circ.$$

В треугольнике MOB $MO=OB$ как половины диагоналей прямоугольника, $\angle ABO=\angle OMB=75°$, поэтому $\angle BOM=30°$.

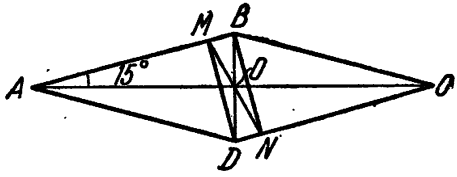

Рис. 15.

Площадь $MBND$

$$S=\frac{1}{2}BD\cdot MN\sin 30°,\quad \text{где}\quad BD=MN=a\operatorname{tg}15°,$$

поэтому $S=\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2 15°$.

Но

$$\operatorname{tg}15°=\operatorname{tg}\frac{30°}{2}=\frac{1-\cos 30°}{\sin 30°}=2-\sqrt{3}.$$

Поэтому $S_{MBND}=\frac{a^2}{4}(2-\sqrt{3})^2$.

Отв. $\left[\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})\right]^2$.

442. Для определенности пусть $\angle A<\angle B$ прямоугольного треугольника ABC с гипотенузою AB. Введем обозначения: R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, D — точка касания гипотенузы с вписанной окружностью (рис. 16).

Гипотенуза $AB=2R$. С другой стороны,

$$AB=AD+DB=OD\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+BD\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right).$$

Таким образом,

$$2R=r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right),$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2\frac{R}{r}=2\cdot\frac{5}{2}=5. \qquad (1)$$

Поскольку $\angle A=\angle B=90°$, то $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=45°$ и

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}=1.$$

Учитывая (1), имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=6. \qquad (2)$$

Решая (1) и (2) совместно и учитывая, что $A < B$, получаем

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=3, \qquad \operatorname{ctg}\frac{B}{2}=2.$$

Отв. $A=2\operatorname{arcctg} 3$, $B=2\operatorname{arcctg} 2$.

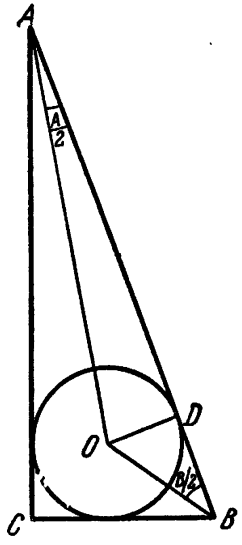

Рис. 16.

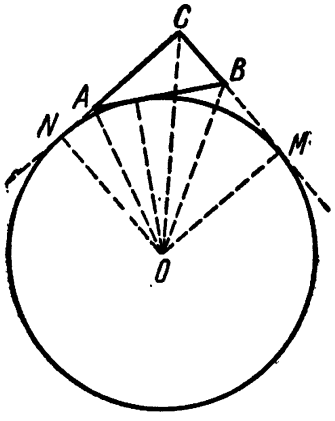

Рис. 17.

443. Обозначим катеты треугольника через a и b, а гипотенузу — c (рис. 17). Имеем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{ab}{2}, \tag{1}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{a+b+c}{2}r, \tag{2}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{aR}{2}+\frac{bR}{2}-\frac{cR}{2}. \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует

$$r=\frac{ab}{a+b+c}. \tag{4}$$

Из (1) и (3) находим

$$R=\frac{ab}{a+b-c}. \tag{5}$$

Перемножив почленно (4) и (5), получим

$$Rr=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-c^2}=\frac{a^2b^2}{2ab}=\frac{ab}{2}=S_{\triangle ABC}.$$

Отв. Площадь треугольника Rr.

444. Первое решение. Очевидно, что искомый четырехугольник — ромб с углами, равными 60° и 120° (рис. 18).

Высота треугольника DMC $ML=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; отрезок $MK=a-\frac{a\sqrt{3}}{2}$; большая диагональ ромба $MN=LK-2MK=a(\sqrt{3}-1)$.

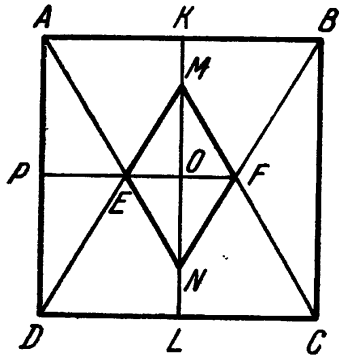

Рис. 18.

Треугольник EMF равносторонний. Так как высота этого равностороннего треугольника $h=\frac{1}{2}MN=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$, то его сторона равна

$$EF=h:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1).$$

Следовательно, площадь ромба равна

$$2S_{\triangle EMF}=EF\cdot h=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)^2=$$

$$=\frac{a^2}{2\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})=\frac{a^2}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}.$$

Второе решение. Пусть EP — высота треугольника AED. Из треугольника AEP имеем

$$EP=\frac{a}{2}\operatorname{tg}30°.$$

$$S_{EMFN}=S_{\triangle AED}+S_{\triangle BFC}+S_{\triangle ANB}+S_{\triangle DMC}-S_{ABCD}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}30°+\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}30°+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-a^2=$$

$$=\frac{a^2}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}-a^2=\frac{(a^2+3a^2)\sqrt{3}-6a^2}{6}=\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}.$$

Отв. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}$.

445. Пусть точки B и C — точки касания окружностей с общей внешней касательной, а O_1 и O_2 — центры окружностей (рис. 19). Проведем $CD\parallel O_1O_2$. В прямоугольном треугольнике BCD катет $BD=BO_1-O_1D=BO_1-CO_2=3-1=2$, а гипотенуза $CD=O_1O_2=3+1=4$. Но если катет в два раза меньше гипотенузы, то противолежащий ему $\angle BCD=30°$, а $\angle BDC=\angle BO_1A=60°$ и

$\angle CO_2O_1 = 120°$. Искомая площадь S равна разности между площадью трапеции O_1O_2CB и суммой площадей секторов AO_1B и AO_2C. Основания трапеции суть 3 и 1, а высота $BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. Поэтому

$$S = \frac{3+1}{2} 2\sqrt{3} - \left(\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 60}{360} + \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 120}{360}\right) =$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{11}{6}\pi = \frac{24\sqrt{3} - 11\pi}{6}.$$

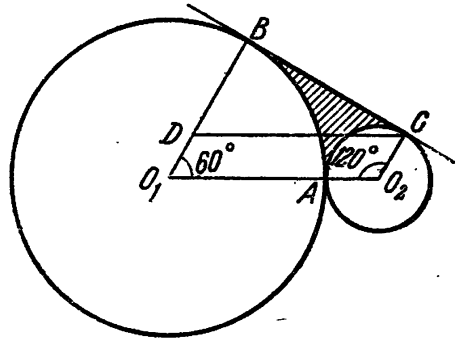

Рис. 19.

Отв. $\frac{24\sqrt{3} - 11\pi}{6}$.

446. Первое решение. Очевидно, что полученные треугольники и основной треугольник подобны (рис. 20). Обозначим площадь треугольника ABC через x.

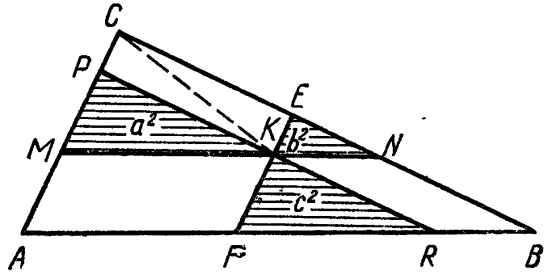

Рис. 20.

Так как площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, то из подобия треугольников ABC и MPK имеем

$$\frac{a^2}{x} = \frac{MK^2}{AB^2}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{MK}{AB}.$$

Аналогично из подобия треугольников ABC и ENK следует, что

$$\frac{b}{\sqrt{x}} = \frac{KN}{AB},$$

а из подобия треугольников ABC и KFR получаем, что

$$\frac{c}{\sqrt{x}} = \frac{FR}{AB}.$$

Имеем

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{x}}=\frac{MK+KN+FR}{AB}. \qquad (1)$$

Из рисунка видим, что

$$MK=AF, \qquad KN=RB,$$

поэтому

$$AB=MK+KN+FR. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{x}}=\frac{AB}{AB}=1,$$

или

$$a+b+c=\sqrt{x},$$

откуда

$$x=(a+b+c)^2.$$

Второе решение. Проведем отрезок KC. Так как площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, то $MP:KE=a:b$, или $MP:PC=a:b$. Учитывая, что треугольники MKP и PKC имеют общую высоту, опущенную из вершины K, находим

$$S_{\triangle MPK}:S_{\triangle PCK}=MP:PC=a:b,$$

т. е.

$$S_{\triangle CPK}=S_{\triangle MPK}\frac{b}{a}=a^2\frac{b}{a}=ab.$$

Отсюда следует, что площадь параллелограмма $PCEK$ равна $2ab$. Аналогично находим, что площадь параллелограмма $KNBR$ равна $2bc$, а площадь параллелограмма $AMKF$ равна $2ac$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=a^2+b^2+c^2+2ab+$$
$$+2ac+2bc=(a+b+c)^2.$$

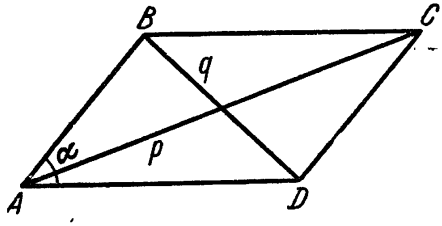

Рис. 21.

Ответ. $(a+b+c)^2$.

447. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 21) $BD=q$, $AC=p$. Из $\triangle ABD$ имеем

$$q^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha, \qquad (1)$$

где через x и y обозначены смежные стороны параллелограмма.

Из $\triangle ACD$ имеем

$$p^2=x^2+y^2+2xy\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из (2) вычитаем (1), получим

$$p^2-q^2=4xy\cos\alpha,$$

откуда

$$xy=\frac{p^2-q^2}{4\cos\alpha}.$$

Площадь параллелограмма равна

$$xy \sin\alpha = \frac{p^2-q^2}{4\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{p^2-q^2}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ. $\frac{p^2-q^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

448. Пусть катеты прямоугольного треугольника a и b, а гипотенуза c.

По условию

$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 2\frac{ab}{2},$$

или

$$c^2 = \frac{4ab}{\sqrt{3}}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$a^2 + b^2 = \frac{4ab}{\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

Поделив обе части (3) на ab, получим

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Обозначив $\frac{a}{b}$ через x, получаем

$$x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

или

$$\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0,$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{3}, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

т. е. отношение большего катета к меньшему равно $\sqrt{3}$.

449. Проводим BD параллельно AT, где D—точка на AC (рис. 22). Так как угол BAT равен углу ABD как внутренние накрестлежащие при параллельных, а угол ACB равен углу BAT как измеряющиеся половиной дуги AB, то угол ABD равен углу ACB. Поэтому треугольники ABD и ABC подобны (у них угол A общий). Из их подобия следует

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}, \qquad \frac{AD}{c} = \frac{c}{b},$$

откуда

$$AD=\frac{c^2}{b}.$$

Далее,

$$DC=AC-AD=b-\frac{c^2}{b}=\frac{b^2-c^2}{b}.$$

Так как $BD \parallel AT$, то

$$\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{BT},\quad \frac{b^2-c^2}{b\frac{c^2}{b}}=\frac{a}{BT},$$

откуда

$$BT=\frac{ac^2}{b^2-c^2}.$$

Имеем

$$AT^2=BT\cdot TC=\frac{ac^2}{b^2-c^2}\left(a+\frac{ac^2}{b^2-c^2}\right)=\frac{ac^2}{b^2-c^2}\,\frac{ab^2}{b^2-c^2}=\frac{(abc)^2}{(b^2-c^2)^2},$$

откуда $AT=\dfrac{abc}{|b^2-c^2|}$.

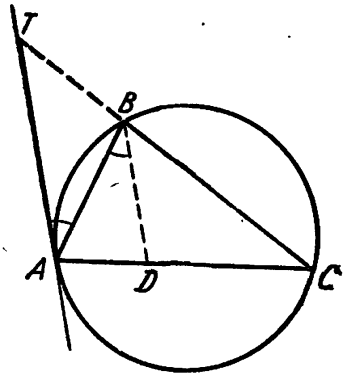

Рис. 22.

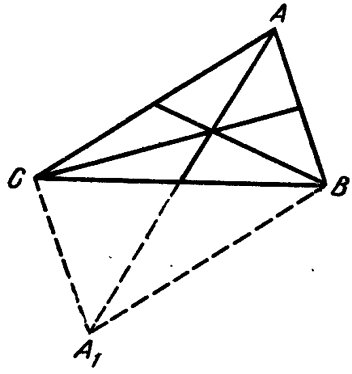

Рис. 23.

450. Дополнив треугольник ABC до параллелограмма ABA_1C, легко найти зависимость (рис. 23)

$$a^2+4m_a^2=2b^2+2c^2.$$

Аналогично

$$b^2+4m_b^2=2a^2+2c^2,$$

$$c^2+4m_c^2=2a^2+2b^2.$$

Из этих трех равенств следует, что

$$4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2),$$

т. е.

$$(m_a^2+m_b^2+m_c^2):(a^2+b^2+c^2)=\frac{3}{4}.$$

451. Пусть CF — третья медиана (рис. 24).

Так как $OF=\frac{c}{2}$ (медиана гипотенузы треугольника AOB равна половине гипотенузы), то $CF=\frac{3c}{2}$.

Поэтому $9c^2+c^2=2(a^2+b^2)$, откуда $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

Отв. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

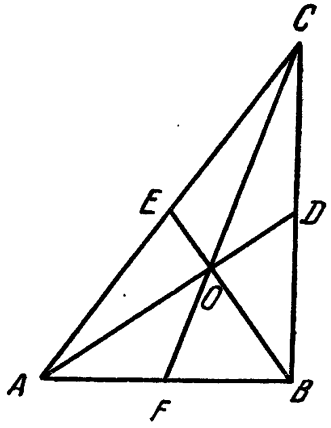

Рис. 24.

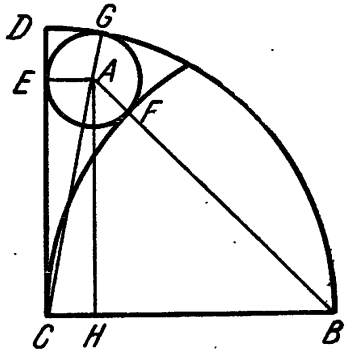

Рис. 25.

452. Соединим центр A круга искомого радиуса x с центрами B, C дуг, к которым он прикасается в точках F, G, и с точкой E, в которой он прикасается к отрезку CD (рис. 25). В треугольнике ABC имеем

$$AB=BF+AF=R+x,$$
$$AC=CG-AG=R-x,$$
$$BC=R.$$

Кроме того, проведя высоту AH, найдем

$$CH=AE=x.$$

По известной теореме имеем

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\cdot CH,$$

или

$$(R+x)^2=(R-x)^2+R^2-2Rx,$$
$$R^2+2Rx+x^2=R^2-2Rx+x^2+R^2-2Rx,$$
$$6Rx=R^2,$$

откуда $x=\frac{1}{6}R$.

Отв. $\frac{R}{6}$.

453. Пусть ABC — данный треугольник, у которого $AB=BC=AC=3$ и $A_1B_1C_1$ — вписанный в него треугольник (рис. 26), причем площадь S треугольника ABC равна утроенной площади S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон, то

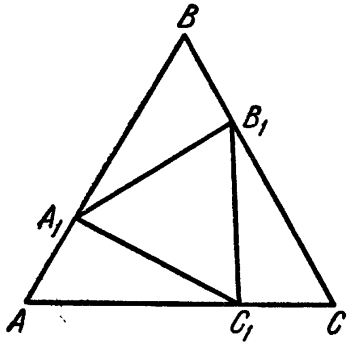

Рис. 26.

$$\frac{A_1C_1^2}{AC^2}=\frac{1}{3},$$

откуда

$$A_1C_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot AC=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=\sqrt{3}.$$

Пусть $CC_1=AA_1=x$, тогда $AC_1=3-x$. Поскольку в треугольнике AA_1C_1 угол A_1AC_1 равен 60°, то

$$A_1C_1^2=AA_1^2+AC_1^2-AA_1\cdot AC_1,$$

или

$$3=x^2+(3-x)^2-x(3-x).$$

Отсюда $x_1=1$, $x_2=2$.

Отв. Расстояния от вершины A до вершин смежных углов равны 1 и 2.

Глава XI

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

454. Пусть AD — биссектриса угла A треугольника ABC (рис. 27). По свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC},$$

или

$$\frac{m}{n}=\frac{c}{b}.$$

Составим производные пропорции

$$\frac{m}{m+n}=\frac{c}{b+c} \text{ и } \frac{m+n}{n}=\frac{b+c}{b}.$$

Так как $m+n=a$, то имеем

$$\frac{m}{a}=\frac{c}{b+c} \quad \text{и} \quad \frac{a}{n}=\frac{b+c}{b},$$

откуда

$$m=\frac{ac}{b+c} \quad \text{и} \quad n=\frac{ab}{b+c}.$$

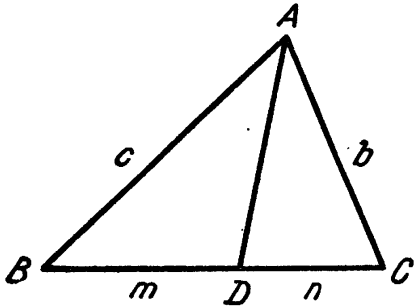

Рис. 27.

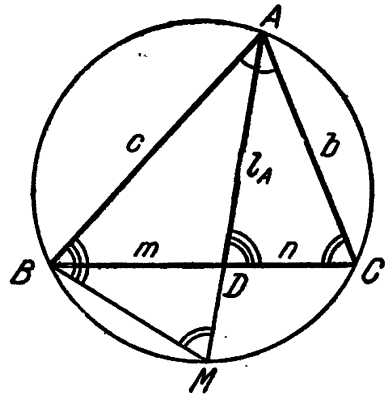

Рис. 28.

455. Первое решение. Пусть AD — биссектриса угла A треугольника ABC (рис. 28). Обозначим отрезки BD и DC стороны BC через m и n, стороны AC и BA — через b и c, а AD — через l_A.

Опишем около треугольника окружность и продолжим биссектрису AD до пересечения с этой окружностью в точке M. Так как углы BAM и CAD равны, а также равны углы AMB и ACB как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу, то треугольники ABM и ADC подобны.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{l_A}{c}=\frac{b}{l_A+DM},$$

откуда

$$l_A^2+l_A\cdot DM=bc. \tag{1}$$

Но так как произведения отрезков каждой из двух пересекающихся хорд равны, то

$$l_A\cdot DM=mn. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$l_A^2=bc-mn.$$

Второе решение. Имеем

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{l_A^2+c^2-m^2}{2cl_A}=\frac{l_A^2+b^2-n^2}{2bl_A},$$

откуда

$$bl_A^2+bc^2-bm^2=cl_A^2+b^2c-cn^2. \tag{3}$$

Поскольку

$$\frac{m}{c}=\frac{n}{b},$$

то

$$m=cx,\quad n=bx,$$

где x — коэффициент пропорциональности. Таким образом, из (3) следует

$$(b-c)\,l_A^2=bc\,(b-c)-(cb^2x^2-bc^2x^2),$$

откуда

$$l_A^2=bc-bcx^2=bc-cx\cdot bx=bc-mn.$$

456. Мы знаем, что $l_A^2=bc-mn$ (задача 455). Также известно (см. задачу 454), что

$$m=\frac{ac}{b+c},\quad n=\frac{ab}{b+c},$$

где m и n — отрезки, на которые делится сторона a биссектрисой угла A.

Имеем

$$l_A^2=bc-mn=bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}=bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]=$$

$$=\frac{bc\,[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}=\frac{bc\,(b+c+a)\,(b+c-a)}{(b+c)^2}=\frac{bc\cdot 2p\cdot 2\,(p-a)}{(b+c)^2};$$

отсюда

$$l_A=\frac{2}{b+c}\sqrt{p\,(p-a)\,bc}.$$

457. В задаче 455 мы доказали, что $l_A^2=bc-mn$, где m и n — отрезки, на которые делит биссектриса l_A сторону a (рис. 28). Известно, что стороны b и c пропорциональны отрезкам m и n. Обозначим коэффициент пропорциональности через k.

Итак, имеем

$$m=kc,\quad n=kb.$$

Сложив эти два равенства почленно, получим

$$m+n=k\,(b+c).$$

Но $m+n=a$, поэтому

$$k=\frac{a}{b+c}.$$

Следовательно,

$$mn=k^2bc=\frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Поэтому

$$l_A^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Аналогично определяются биссектрисы углов B и C:

$$l_B^2 = ac - \frac{b^2 ac}{(a+c)^2};$$

$$b_C^2 = ab - \frac{c^2 ab}{(a+b)^2}.$$

458. Площадь треугольника ABC (рис. 29) равна

$$0{,}5bc \sin A. \qquad (1)$$

С другой стороны, площадь этого же треугольника равна сумме площадей треугольников ABD и ACD (D — основание биссектрисы угла A), т. е. равна

$$0{,}5l_A (b+c) \sin \frac{A}{2}. \qquad (2)$$

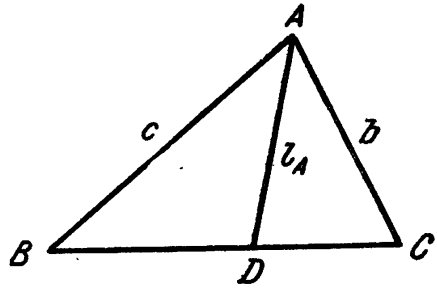

Рис. 29.

Приравняв (1) и (2), получаем

$$0{,}5bc \sin A = 0{,}5l_A (b+c) \sin \frac{A}{2},$$

или

$$2bc \sin\frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = l_A (b+c) \sin\frac{A}{2},$$

откуда

$$l_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

Аналогично находим

$$l_B = \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a+c}, \quad l_C = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a+b}.$$

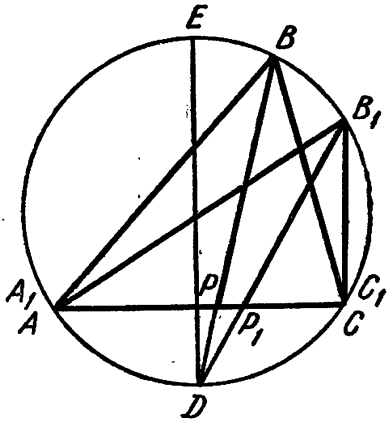

Рис. 30.

459. Около треугольника ABC (рис. 30) опишем окружность и проведем диаметр DE перпендикулярно AC.

Угол B_1 равен углу B и $A_1C_1 = AC$, поэтому если совместим A_1C_1 с AC, то вершина B_1 будет находиться на той же дуге, что и B, если треугольники расположить по одну сторону от AC (A_1C_1), причем расположить вершину B_1 по ту же сторону от DE, что и вершину B. Допустим, что B и B_1 не совпадают. Так как точка D делит дугу AC пополам, то обе биссектрисы BP и B_1P_1 при их продолжении проходят через точку D.

Для определенности пусть дуга DCB больше дуги DCB_1, тогда отрезок DB больше отрезка DB_1 (так как, проведя хорду BB_1, получим $\triangle DBB_1$, в котором $\angle BB_1D > 90°$). Отрезок DP меньше, чем DP_1, так как проекция DP на AC меньше проекции DP_1 на AC_1.

Таким образом,

$$BD > B_1D,$$

$$DP < DP_1.$$

Вычитая почленно эти неравенства, получим

$$BD - DP > B_1D - DP_1,$$

т. е. $BP > B_1P_1$, что противоречит условию ($BP = B_1P_1$). Следовательно, точка B_1 совпадает с точкой B, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

460. Первое решение. В задаче 457 мы доказали, что

$$l_A^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}, \quad l_B^2 = ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2}.$$

Следовательно, нам дано, что

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2},$$

или

$$b - \frac{a^2b}{(b+c)^2} = a - \frac{ab^2}{(a+c)^2},$$

или

$$(a-b) = \frac{ab^2}{(a+c)^2} - \frac{a^2b}{(b+c)^2} = ab\left[\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2}\right].$$

Предположим, что треугольник неравнобедренный, т. е. $a \neq b$. Для определенности пусть $a > b$, тогда $a - b > 0$.

Рассмотрим разность

$$\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2}.$$

Согласно нашему предположению ($a > b$) числитель уменьшаемого меньше числителя вычитаемого, а знаменатель уменьшаемого больше знаменателя вычитаемого, поэтому уменьшаемое меньше вычитаемого, а следовательно, рассматриваемая разность отрицательна.

Итак, предположив, что треугольник неравнобедренный, мы пришли к тому, что положительное число равно отрицательному, что невозможно. Следовательно, наше предположение отпадает и треугольник равнобедренный.

Второе решение. Мы знаем, что

$$l_A = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc},$$

$$l_C = \frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-c)ab}.$$

Итак, по условию задачи имеем

$$\frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}=\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-c)ab},$$

или

$$\frac{4}{(b+c)^2}\cdot p(p-a)bc=\frac{4}{(a+b)^2}p(p-c)ab,$$

или

$$\frac{a(p-c)}{(a+b)^2}=\frac{c(p-a)}{(b+c)^2}.$$

Отсюда

$$(b^2+2bc+c^2)(ap-ac)=(a^2+2ab+b^2)(cp-ac),$$

или

$$ab^2p+2abcp+ac^2p-ab^2c-2abc^2-ac^3=$$
$$=a^2cp+2abcp+b^2cp-a^3c-2a^2bc-ab^2c,$$

откуда

$$(ab^2p-b^2cp)-(a^2cp-ac^2p)+(2a^2bc-2abc^2)+(a^3c-ac^3)=0.$$

Следовательно,

$$(a-c)[b^2p-acp+2abc+ac(a+c)]=0. \qquad (1)$$

Но

$$a+c=2p-b \quad \text{и} \quad ac(a+c)=2acp-abc. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$(a-c)(b^2p+acp+abc)=0.$$

Выражение во вторых скобках положительно, поэтому $a-c=0$ и $a=c$, т. е. треугольник равнобедренный.

Третье решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 31) BM и CN — биссектрисы углов B и C, причем $BM=CN$.

Построим отрезки ND и DM, соответственно равные и параллельные отрезкам BM и BN.

Введем обозначения

$$\angle BCN=\angle NCA=\alpha,$$
$$\angle CBM=\angle MBA=\beta,$$
$$\angle MDC=\gamma \text{ и } \angle MCD=\varphi.$$

Так как $BNDM$ — параллелограмм, то $\angle NDM=\beta$.

Допустим, что $AB>AC$, тогда $2\alpha>2\beta$, т. е.

$$\alpha>\beta. \qquad (1)$$

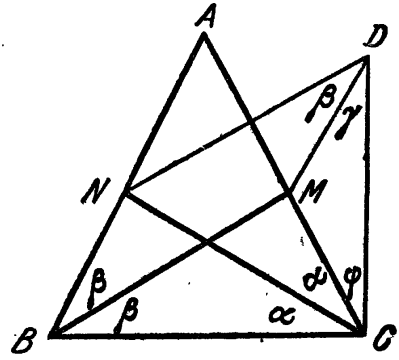

Рис. 31.

В треугольниках BNC и BMC сторона BC — общая, $CN=BM$, но $\alpha>\beta$, следовательно,

$$BN>MC.$$

Так как $MD=BN$ — стороны параллелограмма $BNDM$, то

$$MD > MC.$$

Поэтому

$$\varphi > \gamma. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$\alpha+\varphi > \beta+\gamma. \tag{3}$$

Но в треугольнике CND $CN=ND$, а поэтому $\alpha+\varphi=\beta+\gamma$, что противоречит (3).

Итак, допущение, что $AB > AC$, неверно. Так же можно доказать, что допущение $AC > AB$ неверно.

Следовательно, $AB=AC$.

461. Пусть в треугольнике ABC (рис. 32) точки H, D и M — основания высоты, биссектрисы и медианы. Для определенности пусть $AB<BC$, тогда $\angle A > \angle C$, а следовательно, $\angle ABH<\angle HBC$. Отсюда следует, что

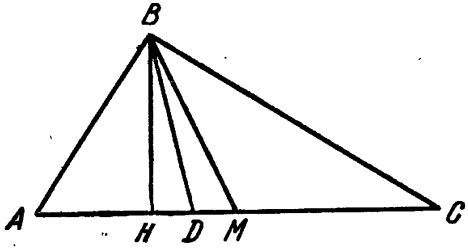

Рис. 32.

$$\angle ABH < \frac{\angle ABC}{2},$$

или

$$\angle ABH < \angle ABD.$$

Отсюда заключаем, что точка H находится между точками A и D. Теперь на основании свойства биссектрисы угла в треугольнике имеем

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

Поскольку $AB < BC$, то и $AD < DC$. Так как $DC > \frac{AC}{2}$, то заключаем, что $AD < \frac{AC}{2}$, или $AD < AM$, а следовательно, точка M лежит между точками C и D.

Итак, мы доказали, что точка D находится между точками H и M.

Если треугольник равнобедренный, то биссектриса, медиана и высота сливаются.

462. Угол между биссектрисами прилежащих углов ABC и CBD есть сумма половин этих углов, и, значит, сумма углов ABC и CBD равна 180°, т. е. эти углы смежные и сторона BD служит продолжением стороны AB, следовательно, точки A, B и D лежат на одной прямой.

463. Пусть диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ является диаметром (рис. 33). Требуется доказать, что проекции DA_1 и BC_1 сторон AD и BC на диагональ BD равны между собой.

Углы ADB и ACB равны как вписанные углы, опирающиеся на дугу $AB < 180°$. Следовательно, прямоугольные треугольники AA_1D и ABC подобны. Из их подобия следует, что

$$\frac{A_1D}{AD} = \frac{BC}{AC},$$

откуда

$$A_1D = \frac{AD \cdot BC}{AC}; \qquad (1)$$

$\angle CBD = \angle CAD$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу $DC < 180°$. Следовательно, прямоугольные треугольники BCC_1 и ACD подобны. Из их подобия следует

$$\frac{BC_1}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

откуда

$$BC_1 = \frac{AD \cdot BC}{AC}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $A_1D = BC_1$, что и требовалось доказать.

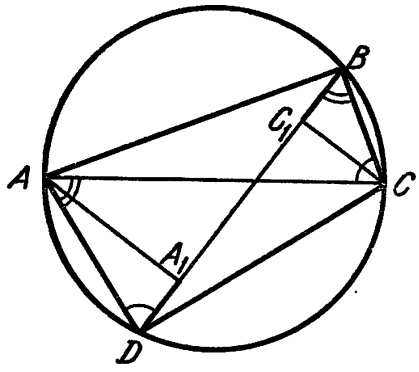

Рис. 33.

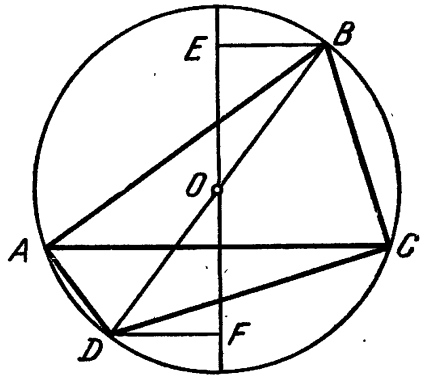

Рис. 34.

464. Около четырехугольника $ABCD$ (рис. 34) можно описать окружность, так как $\angle BAD = \angle BCD = 90°$. Отрезок BD, на который опирается вписанный прямой угол BAD, есть диаметр этой окружности, так что BD проходит через центр O. Перпендикуляр, проведенный к хорде AC через ее середину, также проходит через центр O круга.

Опустив из точек B и D соответственно перпендикуляры BE и DF на перпендикуляр, проведенный к хорде AC через ее середину, находим, что прямоугольные треугольники ODF и OBE равны, так как гипотенузы их OD и OB равны как радиусы одного круга и $\angle DOF = \angle BOE$. Следовательно, $DF = BE$.

Мы исходили из того, что прямая BD не совпадает с перпендикуляром к хорде AC, проведенным через ее середину. Если же прямая BD совпадает с этим перпендикуляром, то расстояния BE и DF обращаются в нуль, т. е. и в этом случае $DF = BE$.

465. Пусть O_2 — окружность, описанная около треугольника ABC, а O_1 — окружность, описанная около треугольника OAC, где O — ортоцентр треугольника ABC (рис. 35). Продолжим высоту OE до пересечения в точке D с окружностью O_2.

$$\angle DAC = \angle DBC, \tag{1}$$

так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу DC окружности O_2;

$$\angle DBC = \angle OAC \tag{2}$$

как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Из (1) и (2) заключаем, что

$$\angle OAE = \angle DAE,$$

а следовательно, прямоугольные треугольники OAE и DAE равны, а также равны треугольники OAC и DAC. Поэтому и окружности O_2 и O_1, описанные около треугольников OAC и DAC, равны. Итак, мы доказали, что окружность, проходящая через O, A, C, равна окружности O_2.

Аналогично доказывается, что окружности, проходящие через O, A, B и O, B, C, равны окружности O_2.

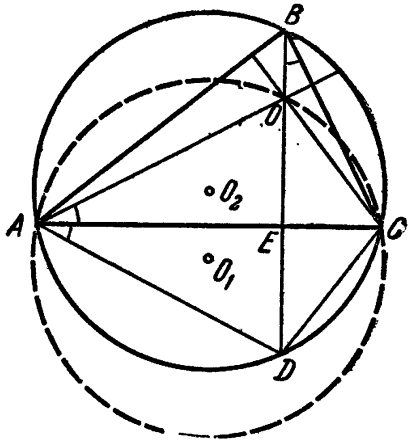

Рис. 35.

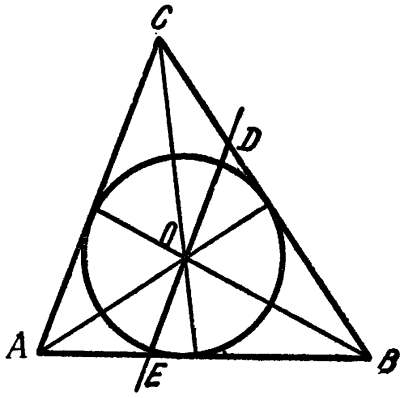

Рис. 36.

466. Пусть прямая DOE — секущая треугольника ABC, проходящая через центр O вписанного в него круга (рис. 36). Требуется доказать, что

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{EACD}} = \frac{BE+BD}{EA+AC+CD}.$$

Имеем

$$S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle BOD} = \frac{BE \cdot r}{2} + \frac{BD \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(BE+BD),$$

$$S_{EACD} = S_{\triangle OAE} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OCD} =$$

$$= \frac{EA \cdot r}{2} + \frac{AC \cdot r}{2} + \frac{CD \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(EA+AC+CD),$$

где r — радиус вписанного круга.

Отсюда

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{EACD}}=\frac{\frac{r}{2}(BE+BD)}{\frac{r}{2}(EA+AC+CD)}=\frac{BE+BD}{EA+AC+CD}.$$

467. Пусть AD—биссектриса угла BAC (рис. 37). По условию $AB=a$, $AC=b$, $AD=c$.

Обозначим $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$. Так как дуги BD и DC равны, то также равны хорды BD и DC. Из треугольников ABD и ACD имеем

$$BD^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha, \quad (1)$$

$$DC^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha. \quad (2)$$

Так как $BD=DC$, то из равенств (1) и (2) следует

$$a^2+c^2-2ac\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

или

$$a^2-b^2=2c(a-b)\cos\alpha,$$

или

$$a+b=2c\cos\alpha,$$

откуда

$$\frac{a+b}{c}=2\cos\alpha.$$

Поскольку угол α есть постоянная величина, то отношение $\frac{a+b}{c}$ — также постоянная величина, т. е. это отношение не зависит от радиуса окружности, отсекающего отрезки a, b, c.

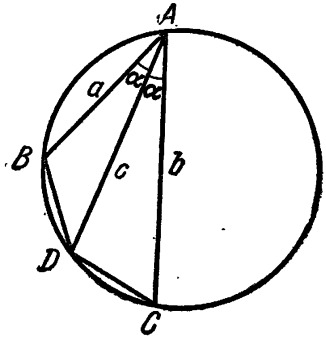

Рис. 37.

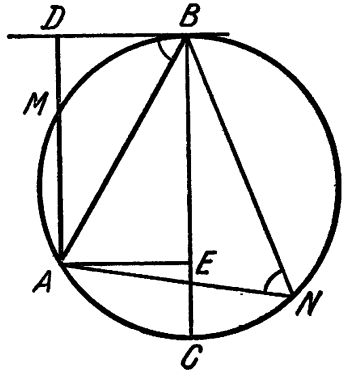

Рис. 38.

468. Первое решение. Пусть AMD — перпендикуляр, опущенный из точки A на касательную DB, а M—вторая точка пересечения AD с окружностью (рис. 38). Из прямоугольного треугольника ABD имеем

$$AB^2=BD^2+AD^2.$$

Но $DB^2 = AD \cdot MD$, поэтому

$$AB^2 = AD \cdot MD + AD^2,$$

откуда

$$\frac{AB^2}{AD} = MD + AD.$$

Легко доказать, что $MD + AD$ есть величина постоянная при любом положении точек A и B, следовательно, и отношение $AB^2 : AD$ есть величина постоянная.

Второе решение. Соединим произвольную точку N дуги ANB с точками A и B (рис. 38). Углы ABD и ANB равны как измеряющиеся половиной дуги AMB. Обозначим их через α.

Имеем

$$\frac{AB}{AD} = \frac{1}{\sin \alpha} \text{ и } AB = 2R \cdot \sin \alpha,$$

где R — радиус окружности.

Перемножив последние равенства почленно, получим

$$\frac{AB^2}{AD} = 2R \text{ — постоянная величина.}$$

Третье решение. Проводим диаметр BC и $AE \perp BC$ (рис. 38). Имеем $AB^2 = BC \cdot BE$ или $AB^2 = BC \cdot AD$ (так как $BE = AD$).

Следовательно,

$$\frac{AB^2}{AD} = BC = 2R \text{ — постоянная величина.}$$

469. Приводим через точки A и B окружности O_1, O_2 и т. д., которые пересекают окружность O соответственно в точках C_1 и D_1, C_2 и D_2 и т. д. (рис. 39).

Пусть M — точка пересечения прямых AB и C_1D_1. Проводим прямую MC_2 и допустим, что эта прямая пересекает окружность O в точке E, а окружность O_2 в точке F. Для окружности O_2

$$MA \cdot MB = MF \cdot MC_2, \quad (1)$$

для окружности O_1

$$MA \cdot MB = MC_1 \cdot MD_1, \quad (2)$$

для окружности O

$$MC_1 \cdot MD_1 = ME \cdot MC_2. \quad (3)$$

Из (1) и (2) следует

$$MF \cdot MC_2 = MC_1 \cdot MD_1. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует

$$ME \cdot MC_2 = MF \cdot MC_2.$$

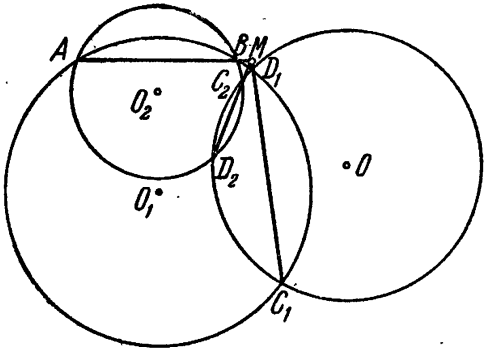

Рис. 39.

Следовательно, $ME = MF$, т. е. точки E и F совпадают. Но точка E принадлежит окружности O, а точка F принадлежит окружности O_2. Следовательно, точки E и F совпадают с точкой D_2.

Таким образом, прямые AB и C_2D_2 также пересекаются в точке M, т. е. M — определенная точка на продолжении хорды AB и через эту точку проходят продолжения всех общих хорд окружности O и окружностей, проходящих через точки A и B.

470. Пусть M, N, E, F, P, R — середины отрезков AB, BC, CD, AD, BD, AC (рис. 40).

Имеем

$$MN = FE = \frac{AC}{2},$$

$$MF = EN = \frac{BD}{2},$$

следовательно, четырехугольник $MNEF$ — параллелограмм. Так как

$$PN = FR = \frac{DC}{2},$$

$$PF = RN = \frac{AB}{2},$$

то четырехугольник $FPNR$ — параллелограмм.

Отрезки ME и FN пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам как диагонали параллелограмма $MNEF$.

Отрезки PR и FN (диагонали параллелограмма $MNEF$), пересекаясь, также делятся пополам. Но так как мы установили, что точка O — середина FN, то PR и FN пересекаются в точке O.

Итак, ME, FN и PR пересекаются в одной точке O и делятся ею пополам.

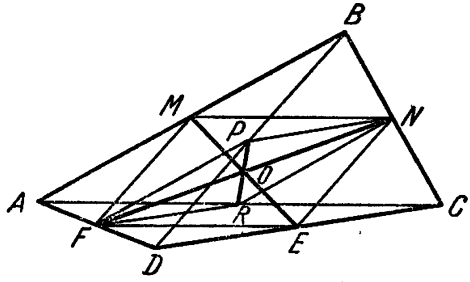

Рис. 40.

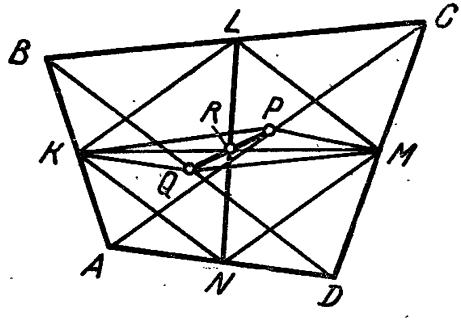

Рис. 41.

471. Пусть точки K, L, M и N — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ (рис. 41). Отрезки KL и MN равны и параллельны как средние линии треугольников ABC и ADC с общей стороной AC. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, и поэтому его диагонали KM и LN в точке пересечения R делятся пополам. Обозначим середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ через P и Q. Отрезки KP и QM равны и параллельны как средние линии треугольников ABC и DBC с общей стороной BC. Значит, четырехугольник $KPMQ$ — параллелограмм, и поэтому отрезок PQ, соединяющий середины диагоналей четырехугольника $ABCD$,

пересечет отрезок KM в его середине R, т. е. в точке пересечения прямых, соединяющих противоположные стороны четырехугольника $ABCD$.

Итак, точки P, Q и R лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

472. Пусть $AB=DE$ и $AB \parallel DE$ (рис. 42). Соединим A с E и B с D. Четырехугольник $ABDE$ — параллелограмм, так как стороны AB и DE равны и параллельны. Следовательно, диагонали AD и BE как диагонали параллелограмма разделятся точкой O пополам. Но если рассмотреть теперь четырехугольник $AFDC$, у которого $AF=CD$, $AF \parallel CD$, то также убедимся, что CF разделится в точке O пополам. Итак, AD, BE и CF проходят через точку O.

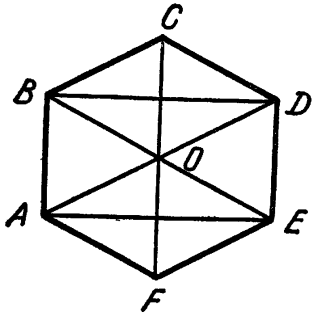

Рис. 42.

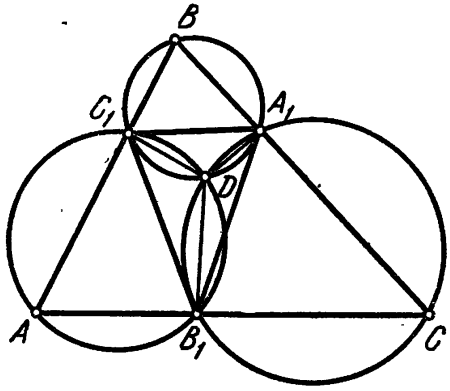

Рис. 43.

473. Опишем окружности около треугольников AB_1C_1 и BA_1C_1, и пусть они пересекаются в точке D (рис. 43).

Заметим, что

$$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB+\angle A_1DB_1+ \\ +\angle A_1DC_1+\angle B_1DC_1=540^\circ$$

как сумма полного угла (при точке D) и сумма внутренних углов треугольника ABC.

Но $\angle CAB+\angle B_1DC_1=180^\circ$ и $\angle ABC+\angle A_1DC_1=180^\circ$ как суммы противолежащих углов вписанного четырехугольника. Поэтому $\angle BCA+\angle A_1DB_1=180^\circ$, т. е. около четырехугольника A_1CB_1D можно описать окружность. Следовательно, и окружность, описанная около треугольника A_1CB_1, проходит через точку D.

474. Дан треугольник ABC. Через вершины A и B, B и C, C и A проведены соответственно окружности O_1, O_2, O_3 (рис. 44). Из произвольной точки M дуги окружности, проходящей через вершины A и B, лежащей вне треугольника ABC, проводим прямые MA и MB до вторичной встречи с окружностями O_2 и O_3 в точках N и P. Далее соединим точки N и P с вершиной C треугольника ABC. По условию задачи сумма

$$\angle M+\angle N+\angle P=180^\circ. \qquad (1)$$

Следовательно, $\angle NCP = 180°$, т. е. точки N, C и P лежат на одной прямой.

Пусть окружности O_1 и O_2 пересекаются в точке O. Соединим отрезками точку O с точками A, B и C. Около четырехугольников $AOBM$ и $BOCN$ описаны окружности, поэтому

$$\left.\begin{aligned} \angle AOB + \angle AMB &= 180°, \\ \angle BOC + \angle BNC &= 180°. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Также имеем

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360°. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует, что

$$\angle AOC + \angle P = 180°,$$

т е. около четырехугольника $AOCP$ можно описать окружность. Но через точки A, P, C уже проведена окружность O_3. Следовательно, эта же окружность проходит и через точку O.

Итак, все три окружности проходят через одну точку O.

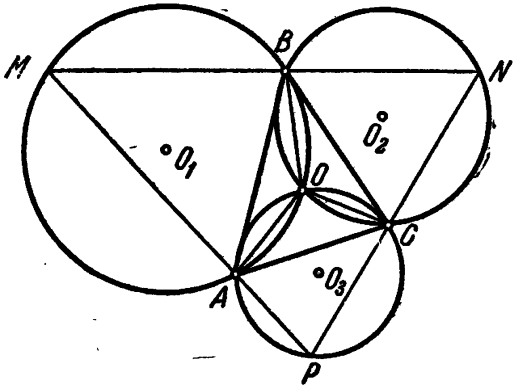

Рис. 44.

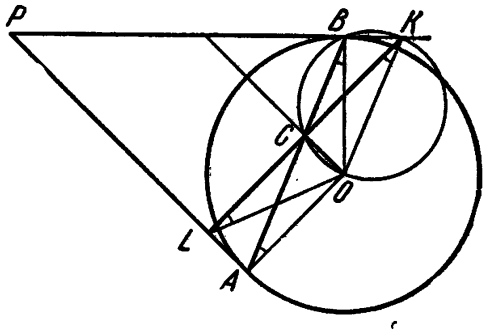

Рис. 45.

475. Пусть PA и PB—две касательные к окружности (рис. 45), C—одна из точек хорды, соединяющей точки касания A и B, а KL—перпендикуляр к OC. Окружность, построенная на OK, как на диаметре, проходит через точки B и C, из которых отрезок OK виден под прямым углом. Следовательно, $\angle OKL = \angle OBC$, и таким же путем докажем, что $\angle OLK = \angle OAC$. Но $\angle OBC = \angle OAC$, так как треугольник OAB равнобедренный. Следовательно, $\angle OKL = \angle OLK$ и $OK = OL$. В равнобедренном треугольнике OKL высота OC есть в то же время и медиана, т. е. $KC = CL$, что и требовалось доказать.

476. Первое решение. Пусть r—радиус вписанного круга, p—полупериметр треугольника ABC (рис. 46), S—площадь треугольника ABC. Опустим из точки O перпендикуляр OP на сторону AB, тогда

$$OP = r = AO \sin \frac{A}{2},$$

$$r^2 = AO^2 \sin^2 \frac{A}{2} = AO^2 \frac{(p-b)(p-c)}{bc},$$

откуда

$$AO^2=\frac{r^2bc}{(p-b)(p-c)};$$

$$AO^2\cdot BC=AO^2\cdot a=\frac{abcr^2}{(p-b)(p-c)}. \qquad (1)$$

Аналогично найдем

$$BO^2\cdot AC=\frac{abcr^2}{(p-a)(p-c)}, \qquad (2)$$

$$CO^2\cdot AB=\frac{abcr^2}{(p-a)(p-b)}. \qquad (3)$$

Складывая равенства (1), (2) и (3) почленно, получим

$$AO^2\cdot BC+BO^2\cdot AC+CO^2\cdot AB=$$
$$=abcr^2\left[\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(p-a)(p-c)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right]=$$
$$=\frac{abcr^2(p-a+p-b+p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\frac{abcr^2[3p-(a+b+c)]}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\frac{abcr^2p}{(p-a)(p-b)(p-c)}=$$
$$=\frac{abcp^2r^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abcS^2}{S^2}=abc.$$

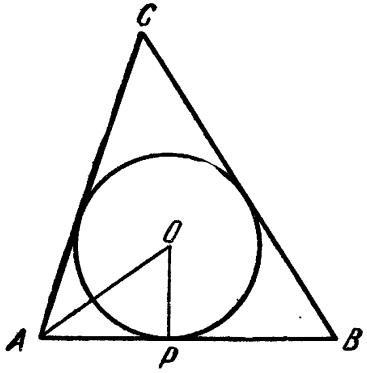

Рис. 46.

Второе решение. Из треугольника AOP имеем $AO=\frac{AP}{\cos\frac{A}{2}}$. Но так как $AP=p-a$, то $AO=\frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$.

Имеем

$$AO^2\cdot BC=\frac{(p-a)^2}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot a.$$

Поскольку $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}$, то

$$AO^2\cdot BC=\frac{abc(p-a)}{p}. \qquad (1)$$

Аналогично находим

$$BO^2\cdot AC=\frac{abc(p-b)}{p}, \qquad (2)$$

$$CO^2\cdot AB=\frac{abc(p-c)}{p}. \qquad (3)$$

Сложив равенства (1), (2) и (3) почленно, получим

$$AO^2 \cdot BC + BO^2 \cdot AC + CO^2 \cdot AB =$$

$$= \frac{abc}{p}(p-a+p-b+p-c) = \frac{abc}{p} \cdot p = abc.$$

477. Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы углы A и A_1 были смежными и стороны A_1C_1 и AB принадлежали бы одной прямой (рис. 47). Из точки C_1 проводим отрезок C_1D, параллельный BC и встречающий AC в точке D.

Из подобия треугольников AC_1D и ABC следует, что

$$\frac{AD}{AC} = \frac{A_1C_1}{AB},$$

или

$$\frac{AD}{b} = \frac{b_1}{c},$$

откуда

$$AD = \frac{bb_1}{c}.$$

Из подобия треугольников B_1C_1D и ABC следует

$$\frac{B_1D}{BC} = \frac{B_1C_1}{AB}. \qquad (1)$$

Но так как

$$B_1D = A_1B_1 + AD = c_1 + \frac{bb_1}{c} = \frac{cc_1 + bb_1}{c},$$

то (1) принимает вид

$$\frac{cc_1 + bb_1}{c \cdot a} = \frac{a_1}{c},$$

откуда

$$aa_1 = bb_1 + cc_1.$$

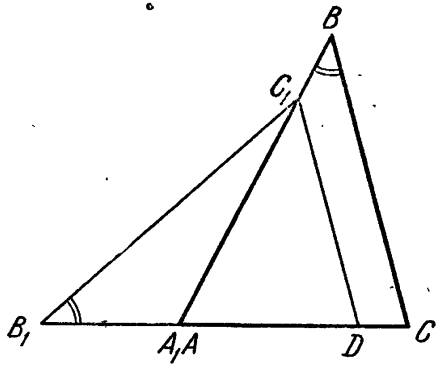

Рис. 47.

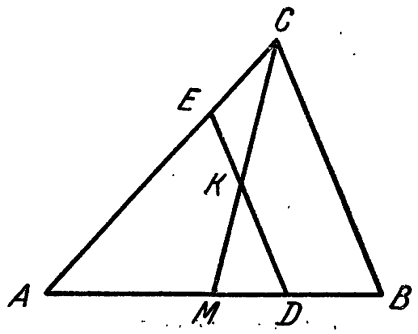

Рис. 48.

478. Треугольник AMC имеет общую с треугольником ABC высоту, проведенную из вершины C, и основание AM, равное половине AB (рис. 48). Поэтому площадь треугольника AMC равна

половине площади треугольника ABC, т. е. равна площади треугольника ADE, площадь которого по условию составляет тоже половину площади треугольника ABC.

Вычитая из равных площадей треугольников AMC и ADE одну и ту же площадь четырехугольника $AMKE$, находим, что треугольники MKD и EKC, имеющие при K равные углы, равновелики. Следовательно,

$$KM \cdot KD = KE \cdot KC.$$

479. Треугольники BMC и BAC (рис. 49) имеют общее основание BC, следовательно, их площади относятся, как их высоты, т. е.

$$\frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{l_a}{h_a}. \qquad (1)$$

Аналогично находим

$$\frac{S_{\triangle BMA}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{l_c}{h_c} \qquad (2)$$

и

$$\frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{l_b}{h_b}. \qquad (3)$$

Складывая почленно (1), (2) и (3), получаем

$$\frac{S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c}.$$

Но так как $S_{\triangle BMC} + S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMA} = S_{\triangle ABC}$, то

$$\frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} = 1.$$

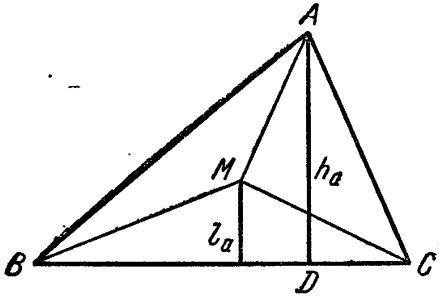

Рис. 49.

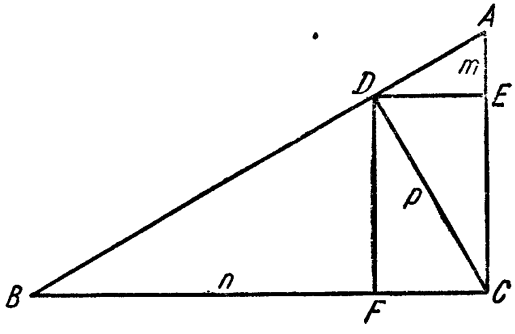

Рис. 50.

480. 1) Из треугольников ACD и CBD (рис. 50) имеем

$$AD^2 = m \cdot AC \text{ и } DB^2 = n \cdot CB. \qquad (1)$$

Заметим, что

$$AC \cdot CB = CD \cdot AB = pc, \qquad (2)$$

так как эти произведения представляют удвоенную площадь треугольника ABC; кроме того,

$$AD \cdot DB = p^2. \qquad (3)$$

Перемножив почленно оба равенства (1) и учитывая (2) и (3), получим

$$p^3 = mnc.$$

2) Из треугольников AED и DFB имеем

$$m^2 = AD^2 - ED^2, \qquad n^2 = DB^2 - DF^2.$$

Сложив эти равенства, получим

$$m^2 + n^2 = AD^2 + DB^2 - (ED^2 + DF^2).$$

Но

$$c^2 = AD^2 + DB^2 + 2AD \cdot DB = AD^2 + DB^2 + 2p^2,$$

$$ED^2 + DF^2 = p^2.$$

Следовательно,

$$m^2 + n^2 = c^2 - 2p^2 - p^2 = c^2 - 3p^2,$$

откуда

$$m^2 + n^2 + 3p^2 = c^2.$$

3) Из подобия треугольников AED и ACB имеем

$$\frac{AD}{m} = \frac{c}{AC}.$$

Также имеем

$$AD^2 = mAC.$$

Из этих двух равенств получаем

$$AD^3 = cm^2, \text{ откуда } AD = \sqrt[3]{cm^2}.$$

Аналогично получаем

$$DB = \sqrt[3]{cn^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{cm^2} + \sqrt[3]{cn^2} = c,$$

или

$$\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{c^2}.$$

481. Пусть стороны параллелограмма a и b, а диагонали D и d $(D > d)$.

По теореме косинусов имеем

$$D^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 45^\circ = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2},$$

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 45^\circ = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2},$$

откуда

$$(Dd)^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab\sqrt{2})^2 = a^4 + b^4,$$

что и требовалось доказать.

482. Требуется доказать, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (рис. 51). Построим угол ABK, равный углу CBD. Треугольники ABK и DBC подобны, так как $\angle ABK = \angle DBC$ (по построению), $\angle BAC = \angle BDC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC). Из подобия этих треугольников следует, что

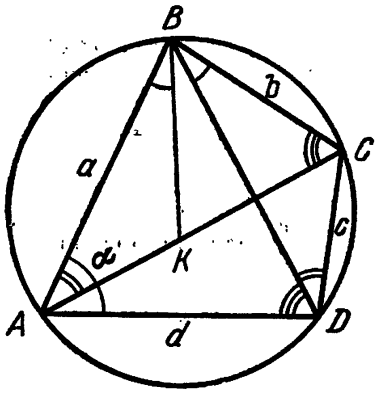

Рис. 51.

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD},$$

или

$$AB \cdot CD = AK \cdot BD. \qquad (1)$$

Треугольники BCK и ABD также подобны, поскольку

$$\angle KBC = \angle ABD$$

(так как $\angle KBC = \angle CBD + \angle DBK$; $\angle ABD = \angle ABK + \angle DBK$)

и

$$\angle ACB = \angle ADB$$

(вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB). Из подобия последних двух треугольников имеем

$$\frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD},$$

т. е.

$$BC \cdot AD = KC \cdot BD. \qquad (2)$$

Сложив почленно равенства (1) и (2), получаем

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = (AK + KC) \cdot BD,$$

или окончательно

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

483. Пусть O — центр описанного круга, OA_1, OB_1, OC_1 — расстояния от O до сторон a, b, c треугольника ABC (рис. 52). Поскольку в четырехугольнике AC_1OB_1 углы B_1 и C_1 прямые, то около него можно описать окружность.

В силу теоремы Птолемея (задача 482) имеем

$$AO \cdot B_1C_1 = AB_1 \cdot OC_1 + AC_1 \cdot OB_1. \qquad (1)$$

Так как

$$AO = R, \quad B_1C_1 = \frac{a}{2}, \quad AB_1 = \frac{b}{2}, \quad AC_1 = \frac{c}{2},$$

то (1) перепишется так:

$$R \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2} OC_1 + \frac{c}{2} OB_1,$$

или

$$Ra = b \cdot OC_1 + c \cdot OB_1. \qquad (2)$$

Так как четырехугольники OA_1BC_1 и OA_1CB_1 тоже вписуемы, то, рассуждая как выше, мы получим

$$Rb = c \cdot OA_1 + a \cdot OC_1 \tag{3}$$

и

$$Rc = b \cdot OA_1 + a \cdot OB_1. \tag{4}$$

Удвоенная площадь треугольника ABC равна $r(a+b+c)$ (r — радиус вписанного круга). С другой стороны, эта же удвоенная площадь равна

$$a \cdot OA_1 + b \cdot OB_1 + c \cdot OC_1,$$

следовательно,

$$r(a+b+c) = a \cdot OA_1 + b \cdot OB_1 + c \cdot OC_1. \tag{5}$$

Сложив почленно равенства (2), (3), (4) и (5) и поделив обе части полученного равенства на сумму $(a+b+c)$, получим

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r,$$

что и требовалось доказать.

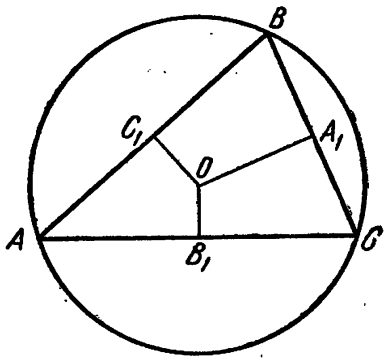

Рис. 52.

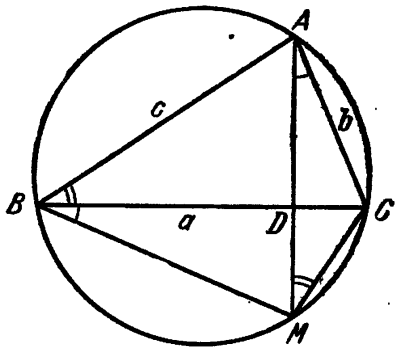

Рис. 53.

484. По теореме Птолемея (задача 482) имеем (рис. 53)

$$AM \cdot BC = BM \cdot AC + MC \cdot AB,$$

или

$$a \cdot AM = b \cdot BM + c \cdot MC. \tag{1}$$

Из подобия пар треугольников MBD, ADC и MDC, BDA имеем

$$\frac{BM}{AC} = \frac{BD}{AD}, \quad \frac{MC}{AB} = \frac{CD}{AD},$$

откуда

$$BM = \frac{BD \cdot AC}{AD} = \frac{b \cdot BD}{AD}, \tag{2}$$

$$MC = \frac{AB \cdot CD}{AD} = \frac{c \cdot CD}{AD}. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) имеем

$$a \cdot AM \cdot AD = b^2 \cdot BD + c^2 \cdot CD.$$

485. Проводим диагонали AC, AD, AE и CE (рис. 54). Так как семиугольник правильный, то около него можно описать окружность. Эта же окружность описана около четырехугольника $ACDE$. Применяя теорему Птолемея (см. задачу 482) к этому четырехугольнику, получаем

$$AD \cdot CE = AC \cdot DE + CD \cdot AE. \qquad (1)$$

Так как $AB = CD = DE$, $AE = AD$ и $AC = CE$, то, поделив обе части равенства (1) на произведение $AB \cdot AC \cdot AD$, получим

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

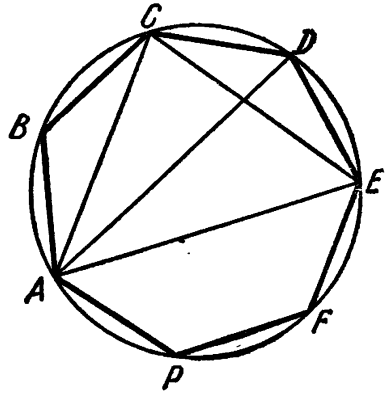

Рис. 54.

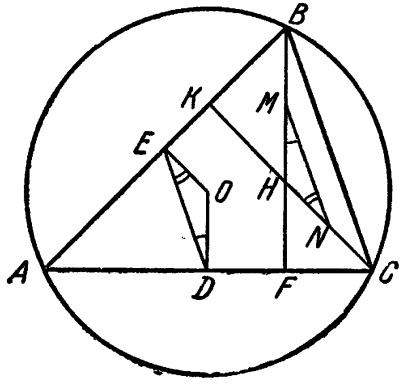

Рис. 55.

486. Предварительно докажем, что в любом треугольнике расстояние от центра описанного круга до стороны вдвое меньше расстояния от противоположной (этой стороне) вершины до ортоцентра.

Действительно, пусть O — центр описанного круга, H — ортоцентр, BF и CK — высоты (рис. 55).

Проводим $OE \perp AB$, MN — среднюю линию треугольника BHC и DE, являющуюся средней линией треугольника ABC. Так как DE равно $\frac{1}{2}BC$ и параллельно BC и MN равно $\frac{1}{2}BC$ и параллельно BC, то DE равно и параллельно MN. Треугольник DOE равен треугольнику MHN, так как $DE = MN$, $\angle D = \angle M$, $\angle E = \angle N$ (углы с соответственно параллельными сторонами). Следовательно, $OD = HM = \frac{1}{2}BH$.

Теперь приступим к непосредственному доказательству нашей теоремы. Пусть BF и AL — высоты, BD — медиана (рис. 56). Так как $OD \perp AC$, то $OD = \frac{BH}{2}$.

Проводим отрезок OH, который пересекает медиану BD в точке M. Проводим NK — среднюю линию $\triangle MBH$. Так как $NK = \frac{BH}{2}$, то

$NK = OD$, кроме того, $\angle MNK = \angle ODM$ и $\angle NKM = \angle DOM$ (внутренние накрестлежащие углы при параллельных NK и OD). Следовательно, $NM = MD$. Но $BN = NM$, поэтому $MD = \frac{1}{3} BD$, т. е. точка M есть точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Таким образом, доказано, что точки O, H и M лежат на одной прямой.

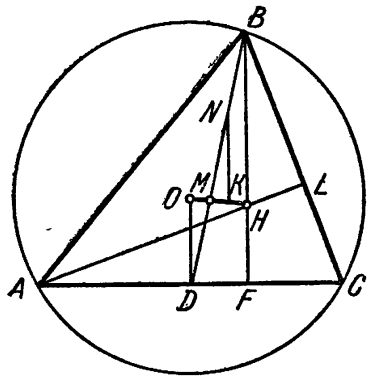

Рис. 56.

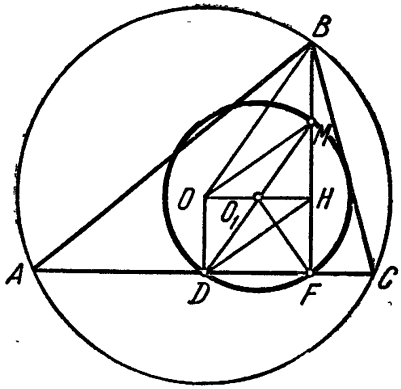

Рис. 57.

487. Пусть (рис. 57) O—центр описанного круга, $OD \perp AC$, BF—высота, H—ортоцентр (точку H можно построить, отложив на высоте BF отрезок, равный $2 \cdot OD$ (см. задачу 486)). Отложим на BF отрезок $BM = OD$ и построим отрезки OB и DM. Так как $OD \parallel BM$, то $DOBM$—параллелограмм. Поэтому $DM = OB = R$ (радиус описанного круга). Проведя отрезки OM и DH, получим параллелограмм $DOMH$ (так как $OD \parallel MH$). Точка O_1 делит его диагонали пополам, следовательно, O_1—середина отрезка OH, $O_1M = O_1D = \frac{R}{2}$, $O_1F = \frac{DM}{2} = \frac{R}{2}$ (медиана гипотенузы $\triangle DMF$ равна половине гипотенузы DM).

Таким образом, окружность $\left(O_1, \frac{R}{2}\right)$, имеющая центром середину отрезка OH, проходит через точки D, F и M, где M—середина BH

Если принять за вершину точку A или точку C, то можно доказать аналогичное свойство для остальных шести точек, указанных в условии.

Поэтому окружность $\left(O_1, \frac{R}{2}\right)$ проходит через девять точек, перечисленных в условии задачи.

488. Известно, что около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна 180°.

Докажем, что $\angle BCE + \angle EDB = 180°$ (рис. 58).

Пусть угол $BCE = \alpha$, тогда дуга CAB равна 2α, дуга BC, дополняющая дугу CAB до окружности, равна $360° - 2\alpha$. Поэтому угол BAC равен $\frac{360° - 2\alpha}{2} = 180° - \alpha$, а угол BAD (как смежный

углу BAC) равен α, а потому дуга BKD равна 2α и дуга BAD равна $360°-2\alpha$ и, следовательно, угол EDB равен $180°-\alpha$.

Итак,

$$\angle BCE+\angle EDB=\alpha+(180°-\alpha)=180°,$$

поэтому около четырехугольника $BCED$ можно описать окружность.

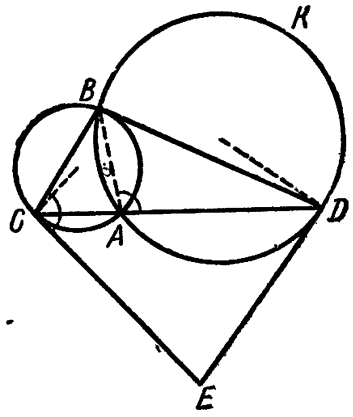

Рис. 58.

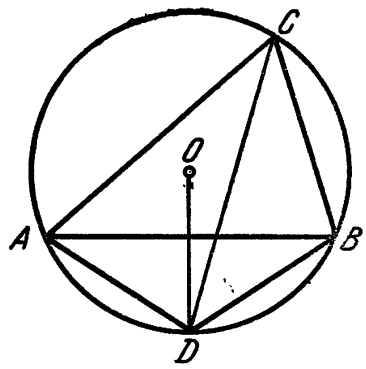

Рис. 59.

489. Опишем около треугольника ABC (рис. 59) окружность с центром O. Центр O лежит на перпендикуляре OD к AB, проведенном через середину AB. Пусть D—точка пересечения биссектрисы угла C с OD. Поскольку и CD и OD пересекают дугу AB в ее середине, то точка D должна быть на дуге AB, а следовательно, окружность, проведенная через точки A, B и C, также проходит через точку D.

Итак, около четырехугольника $ADBC$ можно описать окружность.

490. Соединим центр O первой окружности с точками касания A и C, а центр O_1—с точками касания B и D (рис. 60). При этом $OA\|O_1B$ и $OC\|O_1D$ как перпендикуляры к прямым AB и CD. Углы AOC и BO_1D равны как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами.

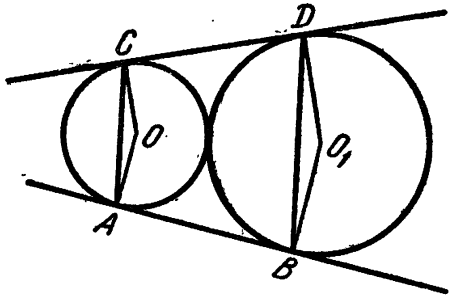

Рис. 60.

Так как треугольники AOC и DO_1B равнобедренные с равными углами при вершине, то они подобны и имеют равные углы, т. е. $\angle OAC=\angle OCA=\angle O_1DB=\angle O_1BD$. Но так как $OA\|O_1B$, то и $AC\|DB$, а следовательно, четырехугольник $ABDC$—трапеция. Легко убедиться, что эта трапеция равнобочная, а как известно, около равнобочной трапеции можно описать окружность.

491. Медиана BM, проходящая через центр окружности O, и перпендикуляр OM_1, проведенный из центра описанной окружности на AC, должны делить AC пополам, но это невозможно, так как

из одной точки O вне прямой нельзя провести перпендикуляр и наклонную к данной прямой AC так, чтобы они пересекали эту прямую в одной точке. Если же треугольник прямоугольный, то основание M медианы BM одновременно является серединой стороны AC и центром круга. Следовательно, в этом случае задача возможна.

492. Первое решение. Пусть вписанный круг касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC соответственно в точках

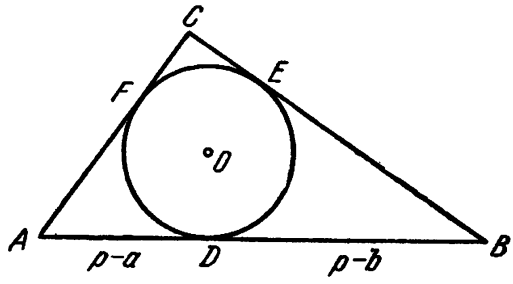

Рис. 61.

D, E и F (рис. 61). По свойству касательных имеем

$$AC=AF+FC=AD+CE, \tag{1}$$

$$BC=CE+BD. \tag{2}$$

Из условия $AC\cdot CB=2AD\cdot DB$ и равенств (1), (2) следует, что

$$(AD+CE)(CE+BD)=2AD\cdot DB,$$

откуда

$$CE^2+AB\cdot CE-AD\cdot DB=0.$$

Это равенство решим относительно CE:

$$CE=\frac{-AB+\sqrt{AB^2+4AD\cdot DB}}{2}.$$

Но так как $2AD\cdot DB=AC\cdot CB$, то

$$CE=\frac{-AB+\sqrt{AB^2+2AC\cdot CB}}{2}. \tag{3}$$

Периметр треугольника ABC равен

$$AB+BC+CA=AB+BE+EC+CF+FA=2AB+2EC.$$

Подставляя значение EC из равенства (3), получаем

$$AB+BC+CA=2AB+(-AB+\sqrt{AB^2+2AC\cdot CB}),$$

откуда

$$BC+CA=\sqrt{AB^2+2AC\cdot CB}. \tag{4}$$

Возведя обе части равенства (4) в квадрат, получим

$$AB^2=AC^2+BC^2,$$

т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом ACB.

Второе решение. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $2p$ — периметр треугольника ABC.

Так как $BD=BE$ и $CF=CE$, то

$$AD+AF=2p-2a,$$

$$AD=p-a.$$

Так же получим

$$BD=p-b.$$

Из условия следует

$$ab=2(p-a)(p-b),$$

$$2ab=(2p-2a)(2p-2b),$$

$$2ab=(b+c-a)(a+c-b),$$

$$2ab=c^2-(a-b)^2,$$

откуда

$$c^2=a^2+b^2.$$

Следовательно, угол ACB прямой.

493. Известно, что площадь треугольника равна pr, где $p=\frac{a+b+c}{2}$, или $\frac{ah_a}{2}$. Следовательно, $pr=\frac{ah_a}{2}$, откуда

$$h_a=\frac{2pr}{a}=2r\,\frac{a+b+c}{2a}=r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right).$$

Аналогично

$$h_b=r\left(1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)$$

и

$$h_c=r\left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right).$$

Сложив почленно последние три равенства, получим

$$h_a+h_b+h_c=r\left(3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Согласно условию задачи должно быть

$$3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)=9,$$

или

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)=6. \qquad (1)$$

Выражения, стоящие в скобках в равенстве (1), суть суммы взаимно обратных положительных величин. Известно, что сумма взаимно обратных положительных величин не меньше двух, т. е. $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 2$. Знак равенства имеет место только при $m=n$.

Таким образом, левая часть равенства (1) может быть равна шести только при $a=b=c$, т. е. когда треугольник равносторонний.

494. Предположим, что треугольник не прямоугольный, т. е. что его ортоцентр не находится в его вершине.

Пусть ортоцентр O находится внутри треугольника *) ABC (рис. 62). По условию задачи четырехугольник $EDFO$ вписан в окружность (E, D и F — середины сторон AB, AC и BC). Следовательно,

$$\angle EOF+\angle EDF=180^\circ. \quad (1)$$

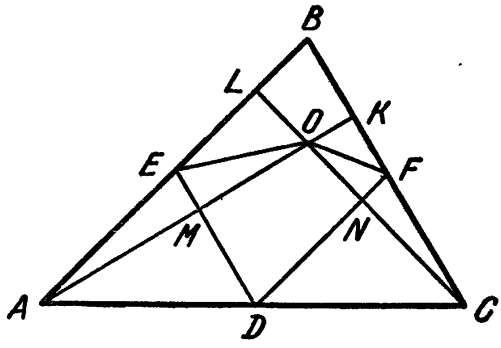

Рис. 62.

Пусть высота AK пересекается с ED в точке M, а высота CL с DF — в точке N.

Так как AK и CL перпендикулярны соответственно BC и AB и поскольку ED и DF параллельны соответственно прямым BC и AB, то ED перпендикулярно AK, а $DF \perp CL$. Вследствие последнего

$$\angle MON+\angle MDN=180^\circ. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\angle EOF=\angle MON.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда OF лежит на стороне BC, а OE — на стороне BA, а так как OE и OF имеют общую точку — ортоцентр, то он должен находиться в точке B (общая для AB и BC). И так как только в прямоугольном треугольнике ортоцентр находится в вершине его угла (прямого), то ABC прямой.

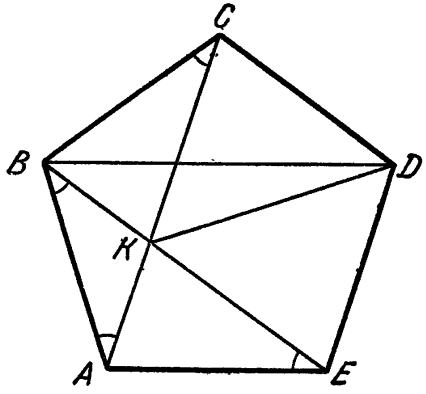

Рис. 63.

495. Пусть в пятиугольнике $ABCDE$ (рис. 63) стороны равны между собой и равны последовательные углы A, B и C.

Проведем диагонали AC, BD и BE. Пусть K — точка пересечения диагоналей AC и BE. Треугольники ABE и ABC равны по двум равным сторонам и углу, заключенному между ними. Поэтому диагонали AC и BE равны и равны углы ACB, AEB, ABE и BAC. Отсюда заключаем, что треугольник AKB равнобедренный. Следовательно, $AK=BK$. Поскольку $CK=AC-AK$ и $EK=BE-BK$, то $CK=EK$.

*) Если исходить из предположения, что ортоцентр находится вне треугольника, мы придем к такому же выводу, как и в приведенном доказательстве.

Треугольники DKE и DKC равны, так как стороны ED и DC равны по условию, EK и CK — по доказанному, а сторона KD — общая. Из равенства треугольников следует равенство углов KED и KCD, а значит, равны углы E и C пятиугольника $ABCDE$ как суммы равных углов.

Таким же образом доказывается равенство углов D и E.

Итак, пятиугольник $ABCDE$ правильный.

496. По условию $EA \perp FB$ и $ED \perp FA$ (рис. 64). Пусть C — точка пересечения прямых ED и FB. Проводим прямую ACK, которая пересекает прямую EF в точке K. В треугольнике FAE отрезки ED и FB являются высотами. Следовательно, точка C — ортоцентр треугольника, а поэтому AK — третья высота, т. е. $AK \perp EF$.

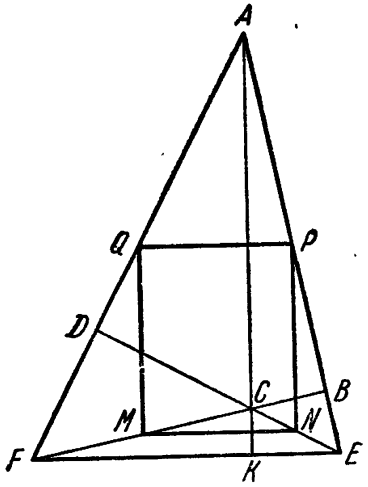

Рис. 64.

В образовавшихся прямоугольных треугольниках FDC, EBC, ADE, ABF точки M, N, P, Q являются соответственно серединами гипотенуз FC, EC, AE, AF. Соединив M с N, N с P, P с Q и Q с M, получим четырехугольник $MNPQ$. Его сторона MN — средняя линия треугольника FCE, поэтому

$$MN = \frac{FE}{2} \quad \text{и} \quad MN \parallel FE;$$

его сторона PQ — средняя линия треугольника FAE, поэтому

$$PQ = \frac{FE}{2} \quad \text{и} \quad PQ \parallel FE.$$

Следовательно, $MN = PQ$ и $MN \parallel PQ$, т. е. $MQPN$ — параллелограмм.

Так как NP — средняя линия треугольника EAC, то $NP \parallel AC$. Следовательно, $\angle QPN = 90°$, т. е. $MQPN$ — прямоугольник.

497. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 65), $\angle BAD = \alpha$, O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов (на рисунке показаны только четверти квадратов). Треугольники BO_1C, AO_2B и т. д. построены так, что каждый из углов, прилежащих к сторонам BC, AB и т. д., равен 45°. Треугольники O_1BO_2 и O_3AO_2 равны, так как $O_1B = O_3A$, $O_2B = O_2A$ и $\angle O_1BO_2 = \angle O_3AO_2 = 90° + \alpha$, где α — острый угол параллелограмма $ABCD$.

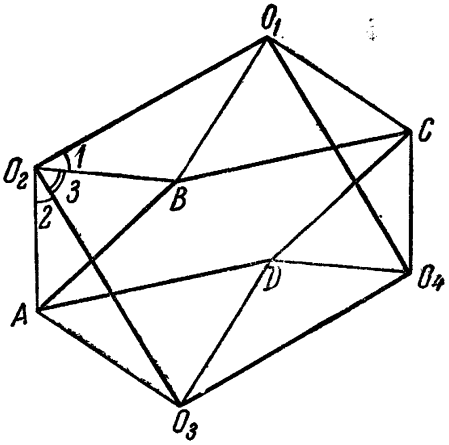

Рис. 65.

Следовательно, $O_1O_2 = O_2O_3$ и $\angle 1 = \angle 2$, а значит, $\angle O_1O_2O_3 = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 90°$, так как $AO_2 \perp O_2B$.

Аналогично можно доказать, что $O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$. Следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

498. Первое решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD и $MN=\frac{AD+BC}{2}$ (рис. 66).

Положим, что точка P — середина диагонали AC, тогда

$$MP=\frac{BC}{2} \quad \text{и} \quad NP=\frac{AD}{2}$$

как средние линии в треугольниках ABC и ACD. Складывая почленно последние два равенства, получим

$$MP+NP=\frac{AD+BC}{2}.$$

Но по условию

$$\frac{AD+BC}{2}=MN,$$

поэтому

$$MP+NP=MN.$$

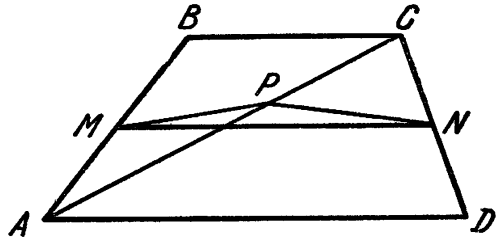

Рис. 66.

Полученное равенство возможно только в том случае, когда точки M, N и P лежат на одной прямой, так как если бы точка P не лежала на прямой MN, то по свойству стороны треугольника было бы

$$MP+NP>MN.$$

Но по свойству средней линии треугольника $BC \parallel MN$ и $AD \parallel MN$, поэтому $AD \parallel BC$, т. е. четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

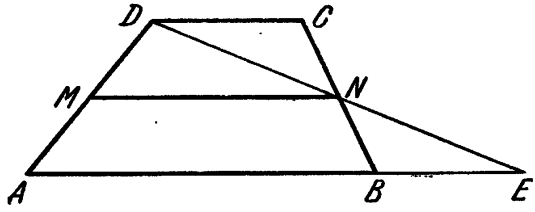

Рис. 67.

Второе решение. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AD и BC (рис. 67). Отрезок DN продолжим на длину NE, равную DN. Соединив точку E с точкой A, получим треугольник ADE, у которого MN — средняя линия, а поэтому

$$MN=\frac{AE}{2}. \qquad (1)$$

Далее, соединив точку E с точкой B, получим треугольник BNE, равный треугольнику DCN, так как $DN=NE$ по построению, $CN=NB$ по условию и углы DNC и BNE равны между собой как вертикальные. Следовательно, $BE=DC$. Так как по условию

$$MN=\frac{AB+DC}{2}$$

и поскольку $DC=BE$, то

$$MN=\frac{AB+BE}{2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$AB+BE=AE.$$

Это равенство возможно только тогда, когда AB и BE лежат на одной прямой. Так как $\angle BEN=\angle CDN$, то $BE \parallel DC$.

Итак, AB параллельно DC и четырехугольник $ABCD$—трапеция.

499. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 68) пересекаются в точке K. Известно, что площади треугольников с равными высотами относятся, как их основания, а потому

$$\frac{S_{\triangle AKB}}{S_{\triangle BKC}}=\frac{AK}{KC} \quad \text{и} \quad \frac{S_{\triangle BKC}}{S_{\triangle DKC}}=\frac{BK}{KD}.$$

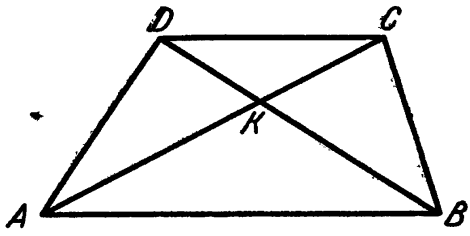

Рис. 68.

Но по условию

$$\frac{S_{\triangle AKB}}{S_{\triangle BKC}}=\frac{S_{\triangle BKC}}{S_{\triangle DKC}},$$

следовательно,

$$\frac{AK}{KC}=\frac{BK}{KD}.$$

На основании последнего равенства, учитывая, что углы AKB и DKC равны как вертикальные, заключаем, что треугольники AKB и CKD подобны, а потому углы ABD и BDC равны. Следовательно, прямые AB и CD параллельны и четырехугольник $ABCD$—трапеция.

500. Пусть A—данная точка окружности, BC—данная хорда, AD—перпендикуляр к BC; BE и CF—перпендикуляры к касательной EF в точке A (рис. 69). Требуется доказать, что

$$\frac{BE}{AD}=\frac{AD}{CF}.$$

Прямоугольные треугольники ABD, ACF подобны, так как у них острые углы ABD, CAF измеряются половиной одной и той же дуги AC. Таким же образом докажем подобие треугольников ACD,

ABE. Четырехугольники $BEAD$ и $ADCF$ подобны, так как они сходственным образом составлены из подобных треугольников. Приравнивая отношения сходственных сторон, получим $\frac{BE}{AD}=\frac{AD}{CF}$, что и требовалось доказать.

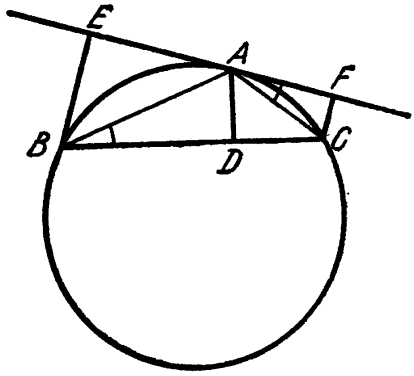

Рис. 69.

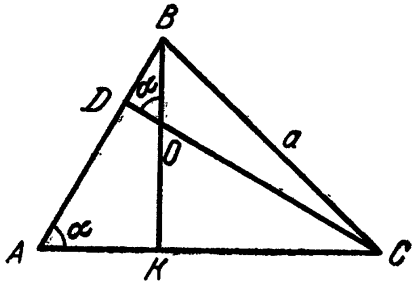

Рис. 70.

501. Для удобства обозначим угол BAC через α (рис. 70 и рис. 71), а сторону BC — через a. Пусть высоты BK и CD пересекаются в точке O. Имеем

$$\angle BOD=\angle BAC=\alpha$$

как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

В прямоугольном треугольнике CDB

$$BD=BC\cos\angle CBD. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике ODB

$$BO=\frac{BD}{\sin\angle BOD}=\frac{BD}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$BO=\frac{BC\cos\angle CBD}{\sin\alpha}=\frac{a\cos\angle CBD}{\sin\alpha}.$$

Известно, что $a=2R\sin\alpha$, поэтому

$$BO=\frac{2R\sin\alpha\cos\angle CBD}{\sin\alpha}=2R\cos\angle CBD.$$

Пусть угол CBD равен 60°, тогда

$$BO=2R\cdot\frac{1}{2}=R.$$

Если же угол $ABC=120°$, то

$$\cos\angle CBD=\cos(180°-120°)=\cos 60°=\frac{1}{2},$$

т. е. и в этом случае $BO=R$.

Итак, мы доказали, что если $\angle ABC$ равен 60° или 120°, то необходимо, чтобы $OB=R$.

Пусть

$$OB=R=\frac{a}{2\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Из прямоугольного треугольника ODB имеем

$$BD=OB\cdot\sin\alpha,$$

или, учитывая (3),

$$BD=\frac{a}{2\sin\alpha}\sin\alpha=\frac{a}{2}.$$

Из треугольника CBD следует, что (рис. 70)

$$BD=a\cos\angle CBD,$$

или (рис. 71)

$$BD=a\cos(180°-\angle ABC).$$

Но так как $BD=\frac{a}{2}$, то $\cos\angle CBD=\frac{1}{2}$ и $\cos(180°-\angle ABC)=\frac{1}{2}$, откуда

$$\angle CBD=60° \quad \text{и} \quad \angle ABC=120°.$$

Итак, мы доказали, что если $OB=R$, то это условие достаточно, чтобы угол при вершине B был равен 60° или 120°.

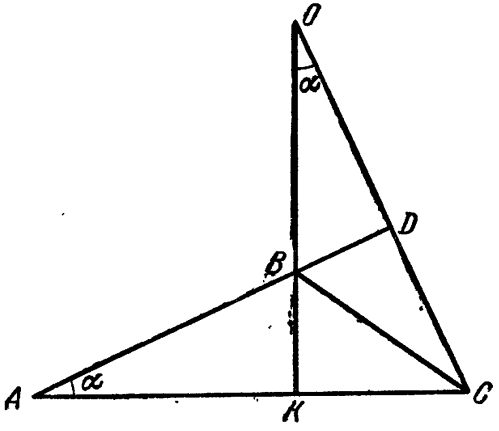

Рис. 71.

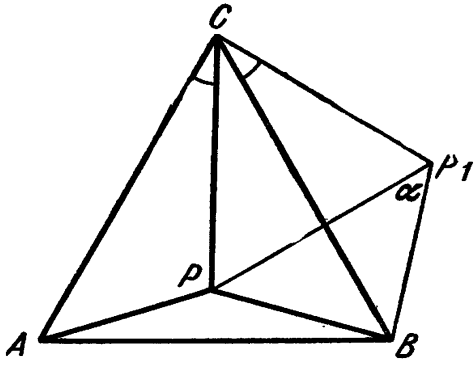

Рис. 72.

502. На отрезке CP строим равносторонний треугольник CPP_1 (рис. 72). Так как каждый из углов ACP и BCP_1 равен $(60°-\angle BCP)$, то они равны, и так как $AC=BC$ и $CP=CP_1$, то треугольники ACP и BCP_1 равны, а следовательно, $BP_1=AP$.

Учитывая, что $CP^2=AP^2+BP^2$, а также, что $PP_1=CP$, $BP_1=AP$, имеем

$$PP_1^2=BP_1^2+BP^2.$$

Поэтому $\angle PBP_1=90°$.

Обозначив угол BP_1P через α, имеем

$$\angle CPA=\alpha+60^\circ, \qquad \angle P_1PB=90^\circ-\alpha,$$

$$\angle CPA+\angle CPP_1+\angle BPP_1+\angle APB=360^\circ,$$

или

$$(\alpha+60^\circ)+60^\circ+(90^\circ-\alpha)+\angle APB=360^\circ,$$

откуда $\angle APB=150^\circ$.

Очевидно, что имеет место и обратная теорема.

503. Пусть $PMNQ$ — общая секущая кругов O и O', касающихся внутренне в точке A (рис. 73). Требуется доказать равенства

$$\angle MAP=\angle NAQ, \qquad \angle NAP=\angle MAQ.$$

Второе получается из первого прибавлением к обеим частям по $\angle MAN$. Чтобы доказать первое, продолжим AM и AN до пересечения с окружностью O' в точках M' и N'. Легко убедиться, что хорды MN и $M'N'$ параллельны. Действительно, если принять точку A за центр гомотетии обеих окружностей, становится ясным, что MN параллельна $M'N'$. Следовательно, заключенные между ними дуги PM', QN' круга O' равны, а потому равны и опирающиеся на эти дуги вписанные углы MAP и NAQ того же круга. Если бы хорда PQ круга O' была касательна к кругу O, то точки M и N совпадали бы с точкой касания и мы получили бы следующую теорему: если два круга внутренне касательны и хорда наружного круга касательна к внутреннему, то прямая, соединяющая точку касания кругов с точкой касания хорды к внутреннему кругу, делит пополам угол между прямыми, соединяющими точку касания кругов с концами хорды. Предлагаем читателю доказать эту теорему самостоятельно.

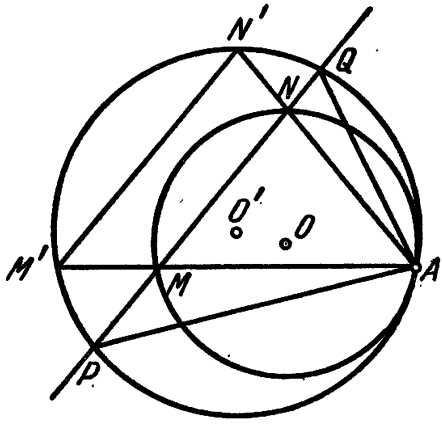

Рис. 73.

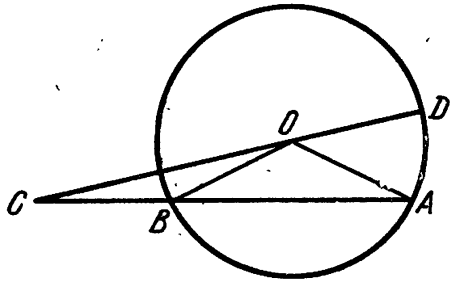

Рис. 74.

504. Треугольник CBO равнобедренный, так как по условию $BC=OB$ (рис. 74). Пусть угол $OCB=COB=\alpha$. Угол $ABO=2\alpha$, так как он является внешним по отношению к треугольнику OBC. Поскольку треугольник ABO равнобедренный, то и угол $OAB=2\alpha$. И, наконец, угол AOD, являясь внешним по отношению к треугольнику AOC, равен $\alpha+2\alpha=3\alpha$. Итак, $\angle AOD=3\angle ACD$.

505. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 75), стороны которого связаны зависимостью $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Требуется

доказать, что BD и AC пересекаются (в точке O) под прямым углом.

Предположим, что углы BOC и AOD тупые, а углы AOB и COD острые. Тогда из треугольников ABO и CDO имеем

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &< BO^2 + AO^2, \\ CD^2 &< CO^2 + DO^2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

а из треугольников ADO и BCO имеем

$$\left.\begin{aligned} AD^2 &> AO^2 + OD^2, \\ BC^2 &> BO^2 + CO^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$AB^2 + CD^2 < AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2, \tag{3}$$

а из (2)

$$BC^2 + AD^2 > AO^2 + BO^2 + CO^2 + OD^2. \tag{4}$$

В неравенствах (3) и (4) правые части равны, поэтому

$$BC^2 + AD^2 > AB^2 + CD^2,$$

что противоречит условию. Итак, прямые AC и BD пересекаются под прямым углом.

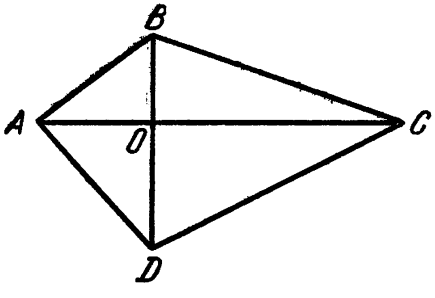

Рис. 75.

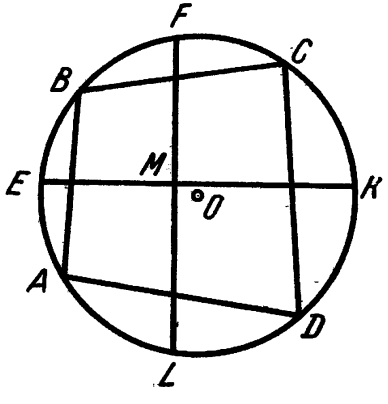

Рис. 76.

506. Пусть четырехугольник $ABCD$ (рис. 76) вписан в окружность. Обозначим середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно через E, F, K и L. Так как угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями, то $\angle FMK$ измеряется

$$\frac{\smile FCK + \smile EAL}{2} = \frac{\smile\frac{BC}{2} + \smile\frac{CD}{2} + \smile\frac{AB}{2} + \smile\frac{AD}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\smile BC + \smile CD + \smile AB + \smile AD}{4} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Следовательно, $\angle FMK = 90^\circ$.

507. Первое решение. Имеем $BD=CE$ и $BD=EF$ (рис. 77). Следовательно, треугольник CEF — равнобедренный. Обозначим углы при основании равнобедренного треугольника ABC через α, а углы при основании равнобедренного треугольника CEF через β. Продолжим FE до пересечения со стороной BC в точке K. Образовавшийся угол FKC тоже равен α. Угол FEC — внешний по отношению к треугольнику EKC, а потому он равен 2α. В треугольнике FEC сумма внутренних углов равна $2(\alpha+\beta)=180°$, откуда $\alpha+\beta=90°$. Итак, $\angle FCB=\alpha+\beta=90°$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Продолжив FE до пересечения с BC в точке K, получим треугольник KFC, в котором CE — медиана, так как $CE=FE$ и $CE=EK$. Так как медиана CE равна половине стороны FK, то $\angle FCK=90°$.

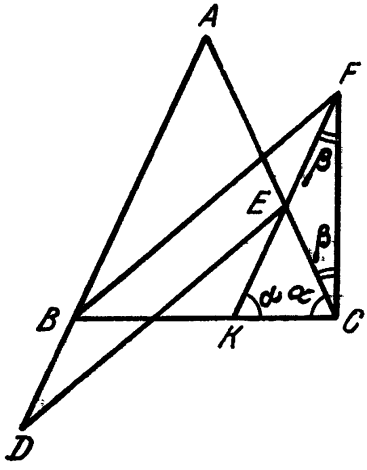

Рис. 77.

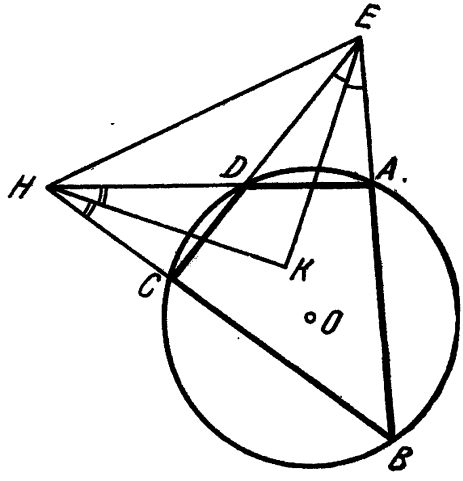

Рис. 78.

508. Первое решение. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в круг (рис. 78). Обозначим точку пересечения сторон AB и CD через E, а сторон AD и BC — через H. Требуется доказать, что угол EKH прямой, если EK и HK — биссектрисы углов BEC и AHB.

Из треугольника EKH имеем

$$\angle EKH=180°-(\angle KEH+\angle EHK). \qquad (1)$$

Введем обозначения $\angle AEK=\angle KED=\alpha$, $\angle DHK=\angle KHB=\beta$, $\angle DEH=x$, $\angle DHE=y$. Таким образом,

$$\angle KEH+\angle EHK=\alpha+\beta+x+y, \quad \angle ADC=\angle HDE=180°-x-y.$$

Рассматривая треугольник BHE, находим

$$\angle EBH=180°-2\alpha-2\beta-x-y.$$

Так как $\angle ADC+\angle EBH=180°$, то

$$180°-x-y+180°-2\alpha-2\beta-x-y=180°,$$

откуда

$$\alpha+\beta+x+y=90°,$$

т. е.

$$\angle KEH+\angle EHK=90°. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\angle EKH=90°$.

Второе решение (рис. 79). Пусть $\angle DEK=\angle KEA=\frac{\alpha}{2}$, $\angle CHK=\angle NHD=\frac{\beta}{2}$ (в радианной мере). Обозначим (в радианах) $\smile DP$ через x, $\smile PA$ через y, $\smile CF$ через z, $\smile FD$ через t, тогда

$$\smile CM=x+\alpha, \quad \smile MB=y+\alpha, \quad \smile BN=z+\beta, \quad \smile NA=t+\beta.$$

Складывая все 8 дуг, получим полную окружность, поэтому

$$2(x+y+z+t+\alpha+\beta)=2\pi, \quad x+y+z+t+\alpha+\beta=\pi. \qquad (1)$$

Так как $\angle HKE$ измеряется $\frac{\smile FDP+\smile MBN}{2}$, то

$$\angle HKE=\frac{(t+x)+(y+\alpha+z+\beta)}{2}=\frac{x+y+z+t+\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, на основании равенства (1) $\angle HKE=\frac{\pi}{2}$, т. е. $HK\perp EK$.

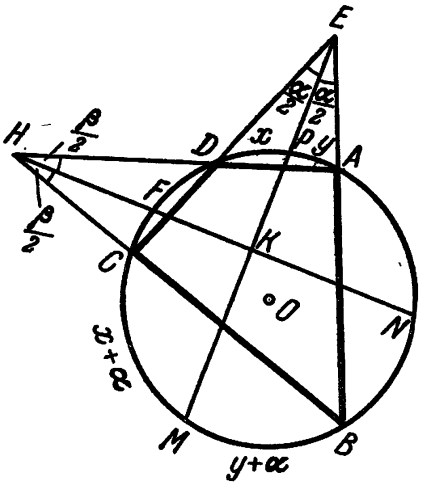

Рис. 79.

509. Пусть ACB—прямоугольный треугольник с прямым углом C (рис. 80), CD—высота треугольника, O_1 и O_2—центры кругов, вписанных в треугольники ACD и BCD. Построим треугольник

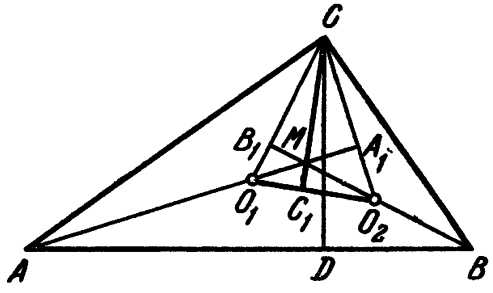

Рис. 80.

CO_1O_2, где CO_1 и CO_2—биссектрисы углов ACD и BCD, а O_1O_2—линия центров.

Проведем биссектрису AA_1 угла A до пересечения в точке A_1 с CO_2 и докажем, что $AA_1\perp CO_2$

Действительно, $\angle DCB=\angle CAB$ как дополнительные к углу ABC.

Далее, $\angle ACA_1 = 90° - \frac{\angle BCD}{2} = 90° - \frac{\angle CAB}{2}$. Таким образом, $\angle CAA_1 + \angle ACA_1 = 90°$, а следовательно, $\angle AA_1C = 90°$, т. е. $AA_1 \perp CO_2$.

Аналогично доказывается, что биссектриса BB_1 угла ABC перпендикулярна к CO_1. Точка M пересечения AA_1 и BB_1 является точкой пересечения биссектрис углов треугольника ABC с ортоцентром треугольника CO_1O_2, поэтому биссектриса CC_1 угла ACB перпендикулярна к O_1O_2, что и требовалось доказать.

510. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC (рис. 81). Пусть O — ортоцентр, K — точка, симметричная с O относительно стороны AC, M — основание высоты, опущенной на AC. Так как $OM = KM$ и $\angle CMO = \angle CMK = 90°$, то треугольники COM и CKM равны между собой, поэтому

$$\angle CKM = \angle COM.$$

Кроме того, $\angle COM = \angle CAB$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\angle CKM = \angle CAB$. Отсюда заключаем, что точка K принадлежит описанной окружности.

Аналогично доказывается, что точки, симметричные с O относительно сторон AB и BC, также лежат на описанной окружности.

Для полного доказательства теоремы предлагается самостоятельно рассмотреть случаи, когда треугольник прямоугольный и тупоугольный.

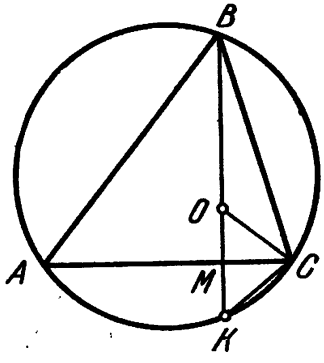

Рис. 81.

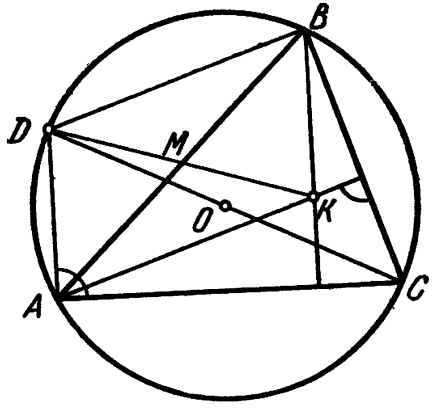

Рис. 82.

511. Пусть точка K — ортоцентр треугольника ABC (рис. 82). Отрезок DK пересекается со стороной AB треугольника ABC в точке M. Так как углы DAC и DBC прямые как вписанные и опирающиеся на диаметр DC, то AD и BD соответственно параллельны прямым BK и AK. Отсюда следует, что четырехугольник $ADBK$ — параллелограмм и точка M — середина стороны AB и отрезка DK.

Итак, $DM = MK$, что и требовалось доказать.

512. Пусть треугольник ABC вписан в круг с центром O, высота треугольника — CD, средняя линия MN параллельна AB

(рис. 83). Соединим отрезком вершину C с серединой E стороны AB. Отрезок CE пересекает MN в точке K, при этом $CK=KE$, так как точка K принадлежит средней линии треугольника CED.

Докажем, что точка K делит MN пополам.

Действительно, $MK=\frac{AE}{2}$ как средняя линия треугольника ACE. Но так как $AE=\frac{AB}{2}$ и $MN=\frac{AB}{2}$, то $MK=\frac{MN}{2}$.

На высоте CD построим прямоугольник $CDEF$; сторона EF проходит через центр O окружности. Очевидно, что точка K является точкой пересечения диагоналей прямоугольника $CDEF$ с центром симметрии его. Поэтому точка O_1, симметричная O относительно K, находится на CD.

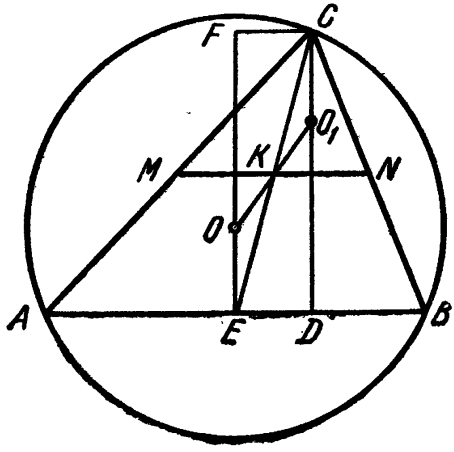

Рис. 83.

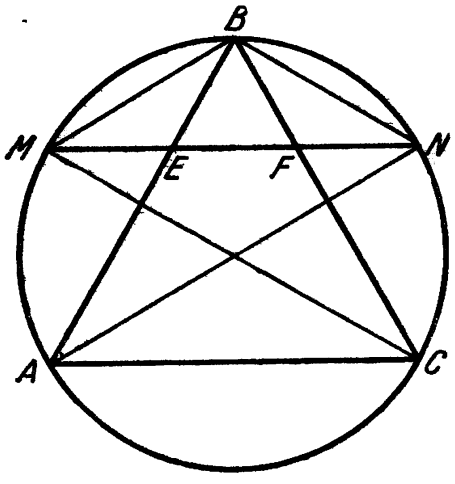

Рис. 84.

513. Пусть точки M и N — середины дуг AB и BC (рис. 84). Хорда MN пересекает AB и BC соответственно в точках E и F. Углы NBF и BNF равны по 30°, так как они вписанные и опираются на дуги в 60°. Следовательно, треугольник BFN равнобедренный, а потому $BF=FN$. Но так как треугольник EBF равносторонний, то $BF=EF$. Из последних двух равенств имеем $FN=EF$. Аналогично доказывается, что $ME=EF$.

Итак, $ME=EF=FN$, что и требовалось доказать.

514. Обозначим точку пересечения прямых AC и PD через E (рис. 85). Из подобия треугольников CDE и BDP имеем

$$\frac{CE}{CD}=\frac{BP}{BD}. \qquad (1)$$

Из подобия прямоугольных треугольников ACD и PBO ($\angle ADC=\angle BOP$) следует

$$\frac{CD}{AC}=\frac{OB}{BP}. \qquad (2)$$

Перемножив почленно (1) и (2), получим

$$\frac{CE}{AC}=\frac{OB}{BD}=\frac{1}{2},$$

так как OB — радиус, BD — диаметр круга.

Итак, точка E — середина отрезка AC, что и требовалось доказать.

515. В прямоугольном треугольнике ABD (рис. 86) проведем медиану AM, тогда гипотенуза $BD=2AM$, так как в прямоугольном треугольнике медиана гипотенузы равна ее половине. В равнобедренном треугольнике ABM угол BAM равен 15°. Тогда угол AMC равен 30° как внешний угол треугольника ABM. Следовательно, в треугольнике ACM стороны AM и AC равны.

Так как $BD=2AM$ и $AM=AC$, то $BD=2AC$, что и требовалось доказать.

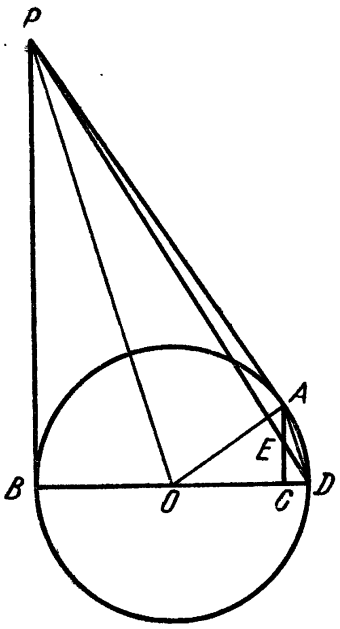

Рис. 85.

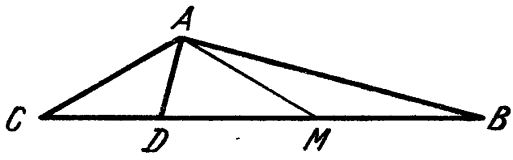

Рис. 86.

516. Имеем

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\quad S=\frac{1}{2}bh_b,\quad S=\frac{1}{2}ch_c.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$S^3=\frac{1}{8}abch_ah_bh_c,$$

откуда

$$S=\frac{\sqrt[3]{abch_ah_bh_c}}{2}.$$

517. Дано, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$

$$\angle A=\angle A_1,\quad AC=A_1C_1,\quad AB+BC=A_1B_1+B_1C_1$$

(рис. 87). Нужно доказать равенство этих треугольников. Продолжим сторону AB на отрезок $BD=BC$ и точку D соединим с C. В равнобедренном $\triangle CBD$ $\angle D=\angle DCB$ как углы при основании; сумма их равна внешнему $\angle ABC$, а потому $\angle ABC=2\angle D$. Делая аналогичные построения для $\triangle A_1B_1C_1$, также установим,

что $\angle A_1B_1C_1 = 2\angle D_1$. Но $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ потому, что у них

$$\angle A = \angle A_1, \quad AC = A_1C_1,$$

$$AD = AB + BD = AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1 = A_1D_1.$$

Отсюда $\angle D = \angle D_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, а тогда равны и третьи углы данных треугольников, т. е. углы ACB и $A_1C_1B_1$ равны.

Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Следовательно, треугольники равны.

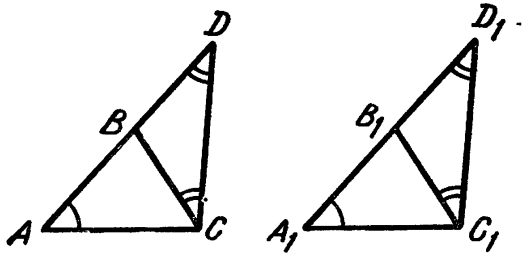

Рис. 87.

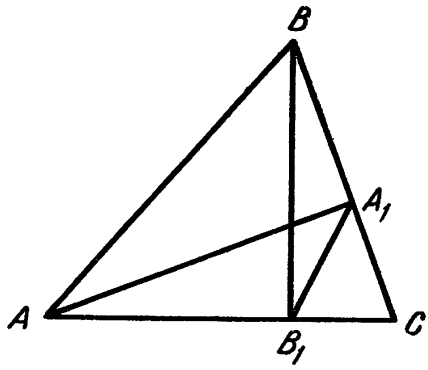

Рис. 88.

518. Пусть в треугольнике ABC (рис 88) AA_1 и BB_1 — высоты. Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны, так как у них общий острый угол C. Поэтому

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C}{B_1C}.$$

Треугольники ABC и A_1B_1C подобны, так как они имеют общий угол C, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны, как было доказано выше.

519. Первое решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC (рис. 89), $A_1B_1C_1$ — треугольник, вершины которого — основания высот данного треугольника, O — центр круга, описанного около данного треугольника. Соединив центр O с основаниями высот A_1, B_1, C_1, разобьем треугольник ABC на три четырехугольника.

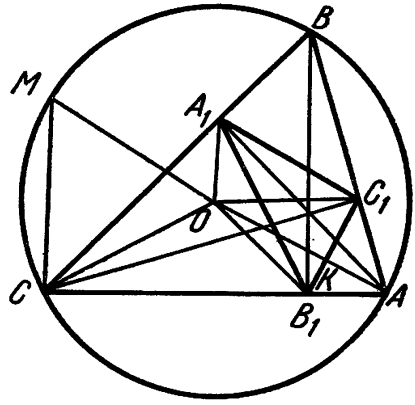

Рис. 89.

Рассмотрим четырехугольник OB_1AC_1; его диагонали OA и B_1C_1 пересекаются в точке K. В задаче 518 мы доказали, что треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC, поэтому угол AB_1C_1 равен углу ABC. Далее, угол AOC (центральный) равен удвоенному углу ABC (вписанному); $2\angle OAC = 180° - \angle AOC = 180° - 2\angle ABC$, откуда $\angle OAC = 90° - \angle ABC$, а потому $\angle AKB_1 = 90°$, т. е. диагонали OA и B_1C_1 взаимно перпендику-

лярны. Следовательно, площадь четырехугольника OB_1AC_1

$$S=\frac{1}{2}OA\cdot B_1C_1=\frac{1}{2}R\cdot B_1C_1,$$

где R — радиус описанного около треугольника ABC круга.

Таким же образом докажем, что площади четырехугольников OC_1BA_1 и OA_1CB_1 равны соответственно $\frac{1}{2}R\cdot C_1A_1$ и $\frac{1}{2}R\cdot A_1B_1$.

Итак, площадь треугольника ABC равна $(A_1B_1+A_1C_1+B_1C_1)\frac{1}{2}R$. Но радиус окружности девяти точек равен $0{,}5\,R$ (см. задачу 487). Следовательно, теорема доказана.

Второе решение. Пусть AM — диаметр описанного круга. Углы AMC и ABC равны как вписанные, опирающиеся на дугу AC. Но $\angle ABC=\angle AB_1C_1$ (задача 518). Следовательно, $\angle AMC=\angle AB_1C_1$. В треугольниках AKB_1 и ACM $\angle A$ — общий, $\angle AB_1K=\angle AMC$. Следовательно, $\angle AKB_1=\angle ACM=90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр). Поэтому $AO\perp B_1C_1$. Дальше, как в первом доказательстве.

520. Пусть $\angle BAC=2\alpha$ (рис. 90).

Проводим $EKF\parallel BC$ и отрезки PE и PF. Имеем

$$\angle PC_1K=\angle EAP=\alpha,$$

$$\angle PB_1K=\angle FAP=\alpha$$

как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Отрезок PE виден из точек K и C_1 под углами в 90°, а отрезок PF виден из точек K и B_1 тоже под углами в 90°, следовательно, около каждого из четырехугольников PEC_1K и $PKFB_1$ можно описать окружность. Поэтому

$$\angle PEK=\angle PC_1K=\alpha, \quad (1)$$

$$\angle PFK=\angle PB_1K=\alpha. \quad (2)$$

Из этих двух равенств следует

$$\angle PEK=\angle PFK=\alpha.$$

Следовательно, в $\triangle EPF$ стороны PE и PF равны, и так как $PK\perp EF$, то

$$EK=KF. \quad (3)$$

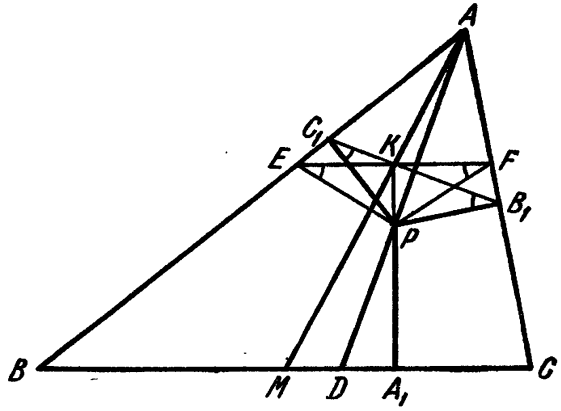

Рис. 90.

На основании теоремы о пересечении параллельных прямых BC и EF пучком прямых, выходящих из точки A, получаем

$$\frac{BM}{EK}=\frac{MC}{KF}. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует

$$BM = MC,$$

т. е. точка K лежит на медиане AM.

521. Продолжим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке M и соединим M с серединой F основания AD (рис. 91).

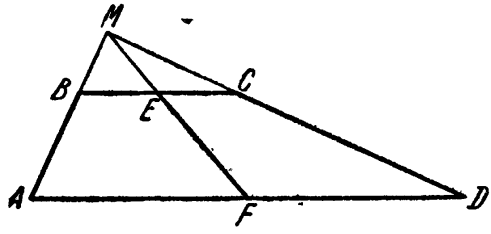

Рис. 91.

Ясно, что BC пересекается с MF в точке E, делящей BC пополам. Так как $\angle A + \angle D = 90°$, то $\angle AMD = 90°$. Поскольку медиана, проведенная из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы, то

$$ME = \frac{BC}{2}, \quad MF = \frac{AD}{2}.$$

Следовательно, $EF = MF - ME = \frac{AD - BC}{2}$, что и требовалось доказать.

Глава XII

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА НАХОЖДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

522. Действительно, пусть будут даны отрезок AB (рис. 92) и отношение k. Будем считать направление отрезка от A к B.

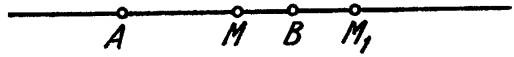

Рис. 92.

Вначале рассмотрим случай деления отрезка внутренним образом. Требуется найти на AB такую точку M, чтобы $AM : MB = k$. Запишем это равенство в виде пропорции

$$\frac{AM}{MB} = \frac{k}{1}.$$

Составим производную пропорцию

$$\frac{AM}{AM+MB}=\frac{k}{k+1},$$

или

$$\frac{AM}{AB}=\frac{k}{k+1},$$

откуда

$$AM=AB\cdot\frac{k}{k+1}.$$

Правая часть этого равенства есть постоянная величина, поэтому AM — тоже постоянная величина, т. е. существует единственная точка M на отрезке AB, которая делит AB в данном отношении.

Таким образом, мы рассмотрели случай, когда $AM \leqslant AB$, т. е. когда точка M делит AB в данном отношении внутренним образом.

Остается доказать, что существует также единственная точка M_1, которая делит внешним образом данный отрезок AB в том же отношении при условии, что это отношение k отлично от единицы ($k>1$ и $k<1$).

1) Пусть $k>1$. Имеем

$$\frac{AM_1}{BM_1}=\frac{k}{1},$$

или

$$\frac{AM_1}{AB}=\frac{k}{k-1},$$

откуда

$$AM_1=AB\cdot\frac{k}{k-1}.$$

2) Пусть $k<1$, тогда точка M_1 определяется из равенства

$$AM_1=\frac{k}{1-k},$$

т. е. точка M_1 находится по другую сторону отрезка AB. Итак, существует единственная точка M_1, которая делит отрезок AB внешним образом в данном отношении.

523. В задаче 522 мы убедились, что две точки, принадлежащие этому геометрическому месту, существуют — одна C на отрезке AB, другая D — на его продолжении (рис. 93).

Теперь рассмотрим произвольную точку M, не принадлежащую прямой, на которой лежит отрезок AB, но являющуюся точкой искомого геометрического места точек. Отрезок MC, который делит отрезок AB на части CA и CB, пропорциональные отрезкам MA и MB, есть биссектриса угла AMB треугольника AMB. Далее, отрезок MD, который делит внешним образом отрезок AB на части, пропорциональные отрезкам MA и MB, есть биссектриса внешнего угла при вершине M треугольника AMB. Легко убедиться, что MC и MD взаимно перпендикулярны, следовательно, точка M принадлежит окружности с центром O, построенной на CD, как на диаметре.

Теперь докажем обратное положение, т. е. что нет точек, удовлетворяющих условию задачи, кроме точек найденной окружности.

Пусть

$$AC:CB=AD:DB=k. \quad (1)$$

Построим на отрезке CD, как на диаметре, окружность. Пусть M — произвольная точка этой окружности. Проведем из точки M прямую MA_1, симметричную с MB относительно MC. Тогда MC — биссектриса $\angle A_1MB$ в $\triangle A_1MB$. Так как $\angle CMD=90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр), то MD — биссектриса внешнего угла при вершине M в $\triangle A_1MB$.

Из свойств биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника следует

$$MA_1:MB=A_1C:CB=A_1D:BD. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получим

$$CB:DB=AC:AD,$$
$$CB:DB=A_1C:A_1D,$$

т. е.

$$AC:AD=A_1C:A_1D.$$

Таким образом, точки A и A_1 делят направленный отрезок CD внешним образом в одном и том же отношении.

На основании доказанного в задаче 522 точка A_1 совпадает с точкой A.

Следовательно, равенство (2) надо записать так:

$$MA:MB=AC:CB=AD:DB. \quad (3)$$

Из (1) и (3) получим

$$MA:MB=k.$$

Следовательно, окружность, построенная на CD, как на диаметре, есть искомое геометрическое место точек.

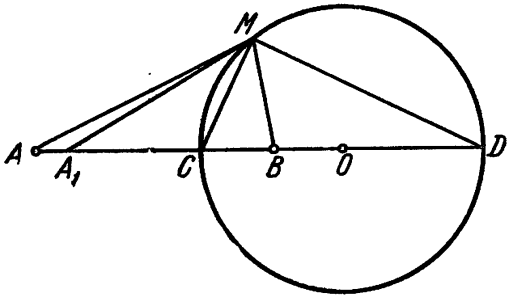

Рис. 93.

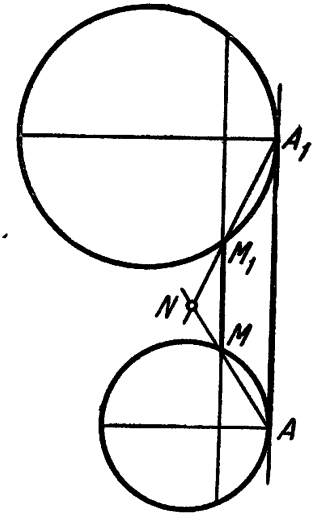

Рис. 94.

524. Пусть диаметры этих окружностей d и D, а расстояние между прямыми AA_1 и MM_1 есть x (рис. 94). Так как хорда есть средняя пропорциональная между диаметром и проекцией этой хорды на диаметр, проходящий через конец этой хорды, то имеем

$$AM^2=dx \quad \text{и} \quad A_1M_1^2=Dx.$$

Из этих равенств следует, что

$$AM:A_1M_1=\sqrt{\frac{d}{D}}. \qquad (1)$$

Так как стороны угла ANA_1 пересечены параллельными прямыми AA_1 и MM_1, то

$$AN:A_1N=AM:A_1M_1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$AN:A_1N=\sqrt{\frac{d}{D}}.$$

Итак, отношение расстояний точки N от двух заданных точек есть постоянная величина ($\sqrt{d:D}$), поэтому геометрическое место точек N есть окружность (см. задачу 523); само геометрическое место точек на рисунке не показано.

525. Рассмотрим два положения подвижной хорды CD (рис. 95). Пусть точки C и D принадлежат меньшей части APB окружности, а точки C_1 и D_1 принадлежат большей части AQB окружности. Точки M и M_1—точки пересечения прямых AD с BC и AD_1 с BC_1. Эти точки принадлежат искомому геометрическому месту. Легко убедиться, что сумма углов AMB и AM_1B измеряется половиной окружности, т. е. M и M_1 лежат на вполне определенной окружности, проходящей через A и B. Эта окружность и есть искомое геометрическое место точек. Имея четыре точки A, B, M и M_1 окружности, легко ее построить. (На рисунке искомое геометрическое место точек не построено.)

Мы рассмотрели положения хорды CD, когда точки C и D лежат по одну сторону от AB. Очевидно, что сумма углов AMB и AM_1B (да и сами углы) не изменится при положении точек C и D по разные стороны от AB, следовательно, и наше заключение сохранится.

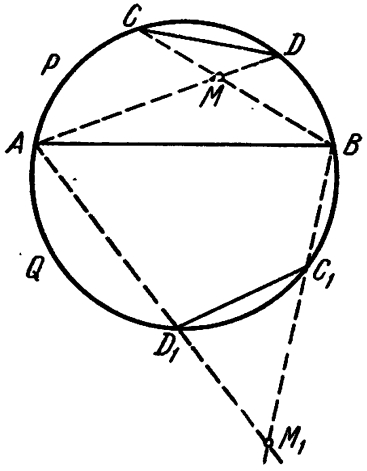

Рис. 95.

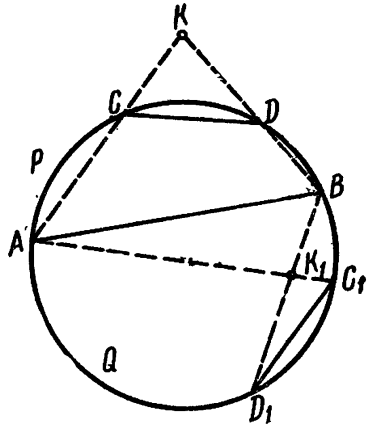

Рис. 96.

526. Рассмотрим два положения подвижной хорды (рис. 96): точки C и D принадлежат меньшей части APB окружности и точки C_1 и D_1 принадлежат большей части AQB окружности. K и

K_1—точки пересечения прямых AC с BD и AC_1 с BD_1. Эти точки принадлежат искомому геометрическому месту точек. Легко убедиться, что сумма углов AKB и AK_1B измеряется половиной окружности, т. е. K и K_1 лежат на вполне определенной окружности, проходящей через A и B.

Имея четыре точки A, B, K и K_1 окружности, легко ее построить. Эта окружность и есть искомое геометрическое место точек. (Искомое геометрическое место точек на рисунке не изображено.)

Мы рассмотрели положение хорды CD, когда точки C и D лежат по одну сторону от AB. Очевидно, что сумма углов AKB и AK_1B (да и сами углы) не изменится при положении точек C и D по разные стороны от AB, следовательно, и наше заключение сохранится.

527. Даны окружность радиуса R с центром O и фиксированный отрезок a (рис. 97). Из точек A, B, C окружности проводим в одном направлении отрезки AA_1, BB_1, CC_1, ..., равные и параллельные данному отрезку a. В том же направлении проводим из центра O отрезок OO_1, также равный a.

Легко усмотреть, что четырехугольники AA_1O_1O, BB_1O_1O, CC_1O_1O, ...—параллелограммы.

Следовательно, искомое геометрическое место точек есть окружность с центром в точке O_1, равная данной окружности.

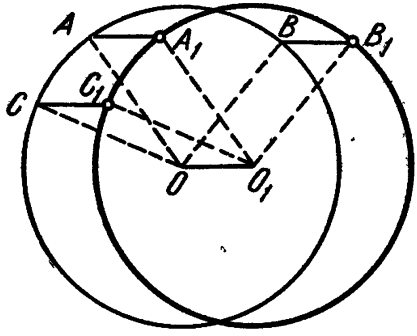

Рис. 97.

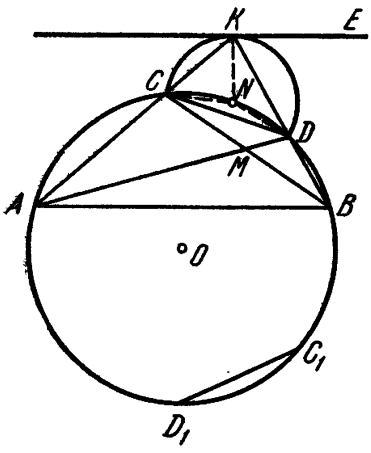

Рис. 98.

528. Пусть точка N—центр окружности, описанной около треугольника KCD, и KE—касательная к этой окружности в точке K (рис. 98).

Поскольку угол CKD—вписанный в дугу CKD, а угол CND—соответствующий центральный, то

$$\angle CND = 2\angle CKD,$$

поэтому углы равнобедренного треугольника CND не изменяются при перемещении хорды CD. Поскольку хорда CD (сторона треугольника CND) также имеет постоянную длину, то и отрезки NC, ND и NK, равные между собой, сохраняют постоянную длину.

Легко убедиться, что

$$\angle EKD = \angle KCD = 180° - \angle ACD = \angle ABD.$$

Из последнего равенства заключаем, что прямые AB и KE параллельны. Так как NK перпендикулярен к KE, то KN также перпендикулярен к AB. К такому же заключению мы пришли бы, если бы хорда CD занимала положение C_1D_1. В задаче 526 мы установили, что геометрическое место точек K есть окружность, проходящая через точки A и B, а так как отрезок KN сохраняет постоянные величину и направление, то геометрическое место точек N есть окружность, равная окружности, проходящей через точки A, B и K, поступательно смещенной на NK (см. задачу 527).

Аналогично доказывается, что геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника MCD, есть окружность, равная той, которую описывает точка M (см. задачу 525), смещенную на N_1M, где N_1 — центр окружности, описанной около треугольника CMD. (Окружность, описанная около треугольника CDM, не показана на рисунке.)

529. Из точки A (рис. 99) проведена секущая ABC (B и C — точки пересечения секущей с окружностью); прямые MB и MC — касательные к окружности. Проведем через точку A и центр O окружности прямую AO и из точки M прямую MP, перпендикулярную к AO. Пусть N — точка пересечения MO и AC. Треугольники OMP и ONA подобны, так как они прямоугольные и острый угол AON — общий.

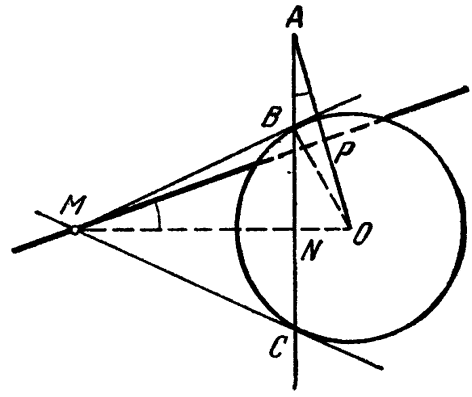

Рис. 99.

Из подобия этих треугольников следует

$$\frac{OP}{OM}=\frac{ON}{OA},$$

откуда

$$OP=\frac{OM\cdot ON}{OA}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника OBM находим

$$OB^2=OM\cdot ON. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$OP=\frac{OB^2}{OA},$$

т. е. OP — постоянная величина, следовательно, искомое геометрическое место точек M есть прямая MP, перпендикулярная к прямой OA, без отрезка, заключенного внутри круга.

530. Пусть точка M (рис. 100) — одна из точек искомого геометрического места

$$\angle BMC=\angle BMD+\angle DMC,$$

но $\angle BMD=\angle BFD$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу BD, и $\angle DMC=\angle DEC$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу CD; $\angle CED=\angle FEA$ как вертикальные; далее, $\angle CAB=\angle DFB+\angle FEA$ (так как $\angle CAB$ внешний по отношению к треугольнику AEF). Следовательно, $\angle CAB=\angle BMC$. Поскольку $\angle CAB$ есть угол данного треугольника, то $\angle BMC$ есть величина

постоянная. Поэтому искомое геометрическое место точек есть окружность, описанная около треугольника ABC, исключая точки B и C. Эта окружность на рисунке не показана.

Замечание. Возможно такое расположение точек E и F, что $\angle BMC$ не будет равен $\angle CAB$, а будет дополнять его до 180°. Легко доказать, что и в этом случае точка M находится на окружности, описанной около треугольника ABC.

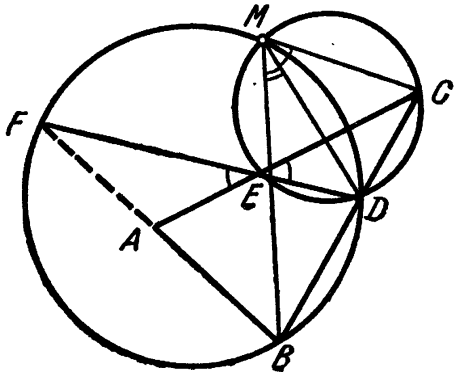

Рис. 100.

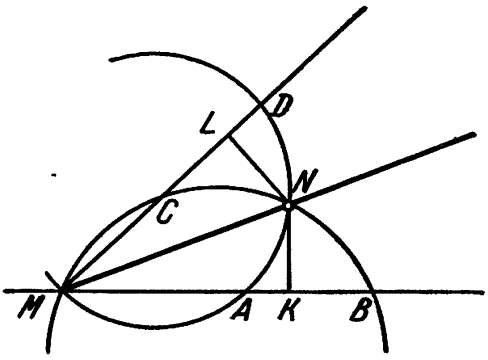

Рис. 101.

531. Окружности, описанные около треугольников MCB и MAD, вторично пересекаются в точке N (рис. 101). В четырехугольнике $MDNA$ сумма

$$\angle MDN+\angle NAM=180°, \tag{1}$$

так как четырехугольник вписанный;

$$\angle NAM+\angle NAB=180° \tag{2}$$

как смежные.

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\angle NAB=\angle CDN.$$

Аналогично

$$\angle NBA=\angle DCN.$$

Так как по условию $AB=CD$, то треугольники CND и ANB равны по стороне и двум прилежащим углам, откуда $NK=NL$ — высоты, опущенные на равные стороны AB и CD. Следовательно, MN — биссектриса угла M, что и требовалось доказать.

532. Пусть один из прямоугольных треугольников, построенных на отрезке $AB=2k$, есть ABC. Центр O вписанного в него круга определяется биссектрисами AO и BO углов A и B (рис. 102).

Так как $\angle OAB+\angle OBA=45°$, то $\angle AOB=135°$.

Следовательно, центры кругов, вписанных в прямоугольные треугольники, расположенные по одну сторону от AB с постоянной гипотенузой, лежат на дуге сегмента, вмещающего угол 135°, построенного на отрезке $2k$. Такая же дуга будет и с другой стороны отрезка $2k$. Теперь найдем радиусы этих дуг.

В треугольнике AOB $\angle O = 135°$, следовательно, $AB = 2R \sin 135°$, где $O_1A = R$, поэтому

$$O_1A = \frac{2k}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = k\sqrt{2}.$$

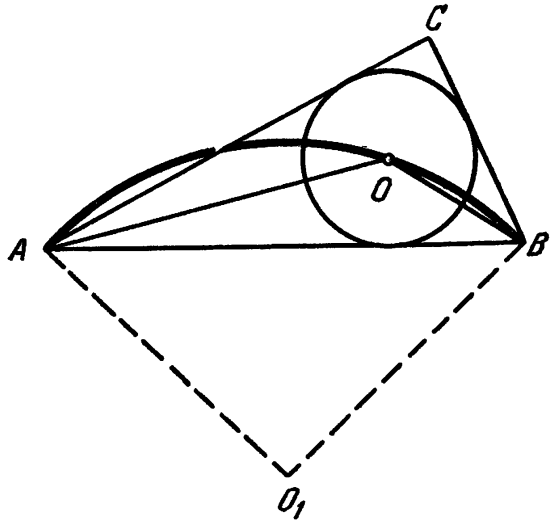

Рис. 102.

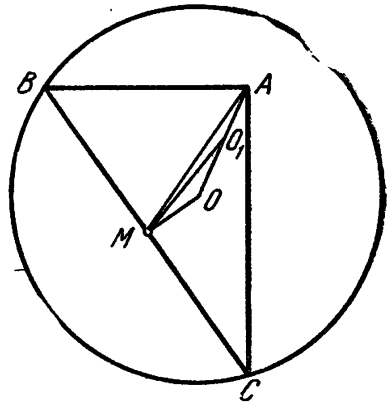

Рис. 103.

533. Соединим середину M (рис. 103) гипотенузы BC с вершиной A и с центром O данной окружности. Центр O данной окружности также соединим с вершинами A и C.

Поскольку $MA = MC$ и отрезок OM перпендикулярен к BC, то

$$MA^2 + MO^2 = MC^2 + MO^2 = OC^2. \qquad (1)$$

В треугольнике AMO отрезок MO_1 — медиана. Найдем квадрат этой медианы, учитывая (1),

$$MO_1^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MO^2) - \frac{1}{4} \cdot OA^2 = \frac{1}{2} OC^2 - OO_1^2.$$

Итак, искомое место точек есть окружность, центр которой есть середина O_1 отрезка OA, а радиус этой окружности

$$MO_1 = \sqrt{\frac{1}{2} OC^2 - OO_1^2}.$$

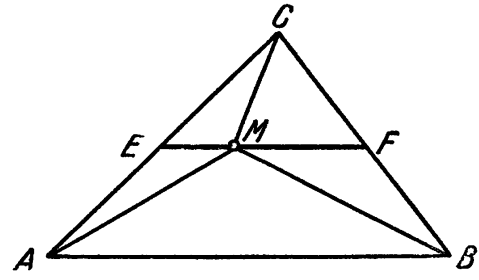

Рис. 104.

534. Искомое геометрическое место точек есть средняя линия EF треугольника ABC, параллельная AB (рис. 104).

Действительно, площадь треугольника MAB (точка M на EF) равна половине площади всего треугольника ABC.

535. Пусть A_1 — середина отрезка MA, где A — точка на данной окружности, а M — данная точка (рис. 105). Соединим O с M и из точки A_1 проведем отрезок A_1O_1, параллельный AO (O_1 на OM). Легко убедиться, что O_1 есть середина отрезка OM, следовательно, O_1A_1 равен половине OA.

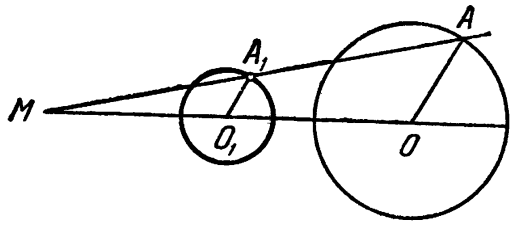

Рис. 105.

Итак, геометрическое место точек A_1 есть окружность с центром в точке O_1, радиус которой равен половине радиуса данной окружности.

536. Первый случай. Точка A находится внутри круга O или на окружности (рис. 106). Из середины M хорды, проходящей через заданную точку A, отрезок OA виден под прямым углом. Следовательно, искомое геометрическое место точек есть окружность, диаметром которой служит отрезок OA.

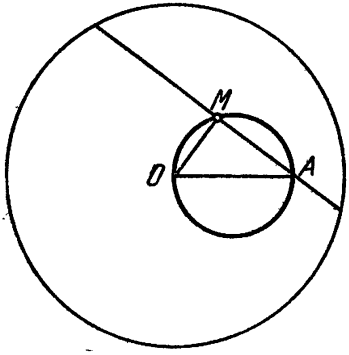

Рис. 106.

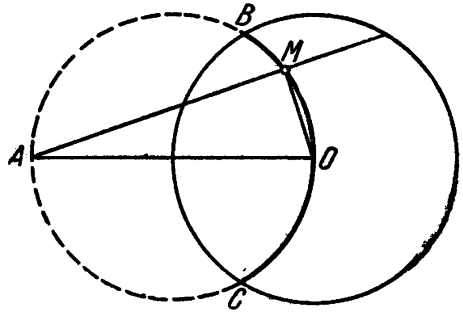

Рис. 107.

Второй случай. Точка A находится вне круга (рис. 107). Как и в предыдущем случае, из середины M хорды, проходящей через заданную точку A, отрезок OA виден под прямым углом, а следовательно, искомое геометрическое место точек есть дуга $BMOC$ окружности, построенной на отрезке OA, как на диаметре, заключенная внутри заданной окружности.

537. Пусть AA_1 — данный фиксированный диаметр окружности O (рис. 108). Отложим на радиусе OC отрезок OM, равный перпендикуляру CD к AA_1. Легко усмотреть, что треугольники OMB и ODC равны ($OB=OC$, $OM=CD$, $\angle MOB=\angle DCO$). Так как треугольник ODC прямоугольный, то и равный ему треугольник

OMB тоже прямоугольный ($\angle BMO=90°$). Итак, из точки M отрезок BO виден под прямым углом. На основании последнего заключаем, что искомое геометрическое место точек есть две окружности, построенные на радиусах, перпендикулярных к заданному диаметру AA_1.

538. Первое решение. Искомым геометрическим местом точек является треть окружности, описанной около данного треугольника, концами этой трети окружности служат две вершины B и C треугольника.

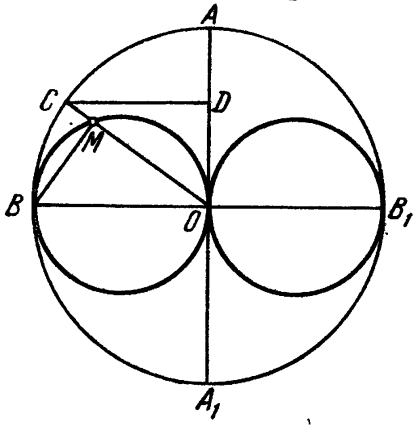

Рис. 108.

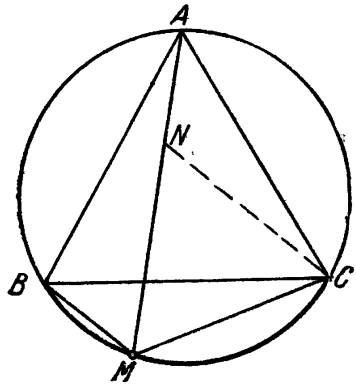

Рис. 109.

В самом деле, возьмем на дуге BC произвольную точку M (рис. 109); тогда, соединяя M с A, B и C, получим вписанный четырехугольник $ABMC$, из которого по теореме Птолемея имеем

$$AM\cdot BC=BM\cdot AC+MC\cdot AB.$$

Но так как

$$AB=AC=BC,$$

то получаем

$$AM=BM+MC.$$

Второе решение. Отложим на AM отрезок $AN=BM$. Углы CBM и CAM равны как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники BMC и ANC равны ($BM=AN$, $BC=AC$, $\angle CBM=\angle CAM$). Таким образом, $NC=MC$. Поскольку $\angle BMC=120°$, то и $\angle ANC=120°$, а потому $\angle MNC=60°$. Из изложенного следует, что треугольник MNC равносторонний.

Итак,

$$AM=AN+NM=BM+CM.$$

539. Пусть O и O_1 — центры данных окружностей (рис. 110). Четырехугольник $OABO_1$ — прямоугольная трапеция, поэтому

$$\angle AOM + \angle BO_1M = 2d,$$

а следовательно,

$$\angle OMA + \angle O_1MB = d,$$

и так как

$$\angle OMA + \angle OMB + \angle AMB = 2d,$$

то $\angle AMB = d$ — постоянная величина.

В силу последнего заключаем, что искомое геометрическое место точек есть окружность, построенная на AB, как на диаметре, исключая точки A и B.

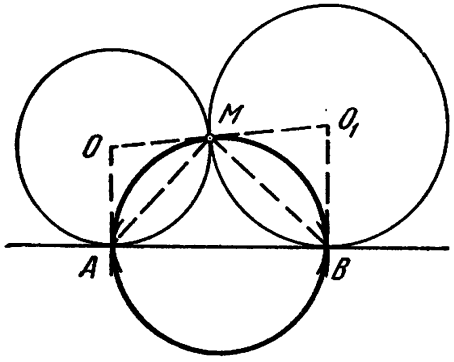

Рис. 110.

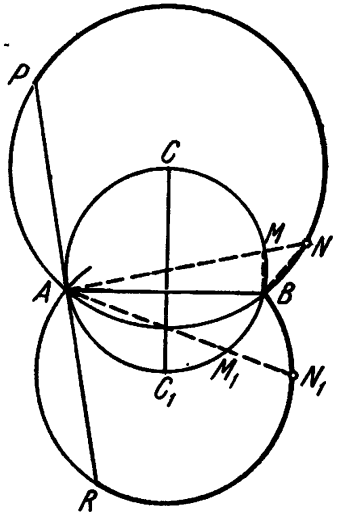

Рис. 111.

540. На продолжении отрезка AM отложим отрезок MN, равный MB (рис. 111). Получившийся треугольник BMN — равнобедренный, следовательно, углы MBN и MNB равны, и так как угол AMB внешний по отношению к треугольнику BMN, то угол MNB равен половине угла AMB. Поскольку угол AMB сохраняет постоянную величину при любом положении точки M, то и угол MNB не изменится, а поэтому точка N перемещается по некоторой дуге, проходящей через точки A и B. Так как конечное положение точки M (при перемещении от B к A) есть точка A, то дуга BNP должна находиться от касательной PR, проведенной к данной окружности в точке A, по ту же сторону, что и точка B. Мы рассматривали точки M по одну сторону от хорды AB, поэтому дуга BNP является только частью искомого геометрического места точек.

Аналогично доказывается, что остальные точки искомого геометрического места точек принадлежат дуге BN_1R, находящейся по другую сторону от AB. Легко усмотреть, что центрами дуг BNP и BN_1R являются середины (C и C_1) дуг BMA и BM_1A.

Глава XIII

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ НА ПОСТРОЕНИЕ

541. Проводим биссектрисы углов B и C до пересечения в точке K (рис. 112). Через точку K проводим параллельную BC прямую, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и D. Отрезок ED — искомый. Действительно, $\angle BKE = \angle KBC$ как внутренние накрестлежащие при параллельных BC и ED и секущей BK, а следовательно, $\angle BKE = \angle KBE$, т. е. треугольник BEK равнобедренный и $EK = BE$. Аналогично доказывается, что $KD = DC$.

Итак, $ED = KE + KD = BE + CD$.

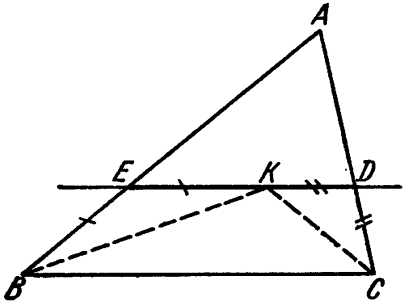

Рис. 112.

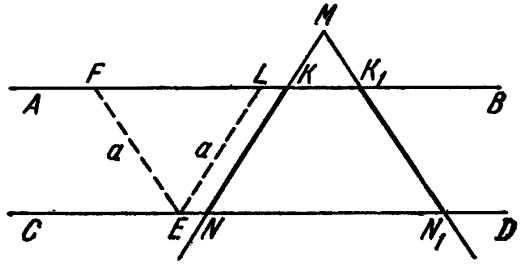

Рис. 113.

542. Из произвольной точки E (рис. 113) прямой CD проводим окружность радиусом a, которая пересекает прямую AB в точках F и L. Проводим прямые MKN и MK_1N_1 (K и K_1 на AB; N и N_1 на CD), соответственно параллельные EL и EF. Прямые MN и MN_1 — искомые, так как отрезок $NK = EL = a$ и отрезок $K_1N_1 = EF = a$.

Задача имеет два решения, если отрезок a больше расстояния между прямыми AB и CD.

Если расстояние между прямыми AB и CD равно a, то задача имеет одно решение, и искомая прямая перпендикулярна к прямым AB и CD.

Если a меньше расстояния между прямыми AB и CD, то задача не имеет решения.

543. Первое решение. Из произвольной точки D стороны AB данного треугольника опускаем перпендикуляр DE на сторону AC (рис. 114). На DE строим равносторонний треугольник DKE. Приняв вершину A за центр гомотетии, проводим прямую AK до пересечения со стороной BC в точке C_1, потом из точки C_1 проводим прямые, параллельные DK и KE, до встречи со сторонами AB и AC в точках B_1 и A_1. Очевидно, что треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый.

Второе решение. Допустим, что задача решена и треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый (рис. 114). Тогда треугольники AB_1A_1 и BB_1C_1 равны как прямоугольные треугольники, имеющие по равному катету ($B_1A_1 = B_1C_1$) и равному острому углу ($\angle A = \angle B = 60°$). Следовательно, $AB_1 = BC_1$.

Пусть $BB_1=x$, тогда $BC_1=2x$, так как угол BC_1B_1 равен 30°. Поэтому и $AB_1=2x$, а $AB=AB_1+BB_1=3x$ или $AA_1=BB_1=CC_1=\frac{AB}{3}$.

Теперь ясно построение. Откладываем на сторонах данного треугольника ABC отрезки $AA_1=\frac{AC}{3}$, $BB_1=\frac{AB}{3}$, $CC_1=\frac{BC}{3}$. Точки A_1, B_1, C_1 являются вершинами искомого треугольника.

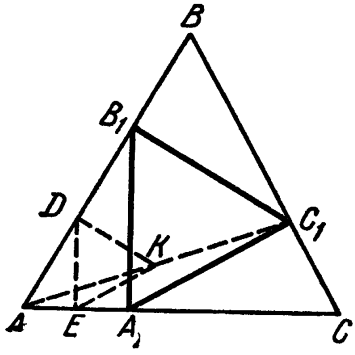

Рис. 114.

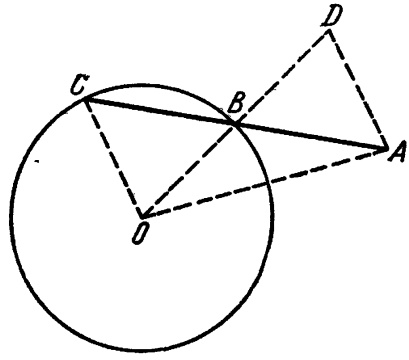

Рис. 115.

544. На отрезке OA строим треугольник AOD (рис. 115), у которого $OD=2R$, $AD=R$, где R—радиус круга. Искомой секущей является прямая ABC, где B—середина OD. Действительно, треугольники BCO и ADB равны, так как они равнобедренные с равными боковыми сторонами (равными радиусу круга) и равными углами при основаниях ($\angle CBO=\angle ABD$ как вертикальные). Поэтому $AB=BC$.

545. Даны две окружности с центрами O и O', пересекающиеся в точках A и B (рис. 116). На отрезке OO', как на диаметре, строим вспомогательную окружность. В этой окружности проводим хорду OC, равную половине данного отрезка, затем через точку A проводим отрезок MAN параллельно OC. Докажем, что отрезок MAN—искомый.

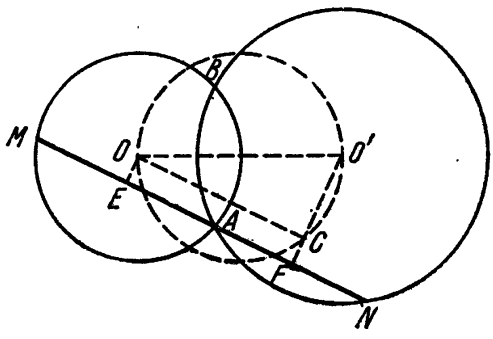

Рис. 116.

Соединим O' с точкой C. Образовавшийся угол $O'CO$—прямой как вписанный и опирающийся на диаметр OO'. Так как $MN\|OC$, то прямая $O'CF$ перпендикулярна к MN. Далее проводим OE перпендикулярно к MN. Из рисунка усматриваем, что $EF=OC$, но так как $AN=2AF$ и $AM=2AE$, то $MN=2EF=2OC$, что и требовалось доказать.

Замечание. Очевидно, что задача имеет решение только тогда, когда $\frac{MN}{2}\leqslant OO'$.

546. Пусть AB — искомая прямая (рис. 117), следовательно, согласно условию задачи $AB=2A_1B_1$ (точки A и B принадлежат большей окружности, а A_1 и B_1 — меньшей окружности). Если OP — перпендикуляр к AB, то $PA_1=A_1A$. Проведя прямую A_1M параллельно OP, которая пересекает OA в точке M, можно легко убедиться, что $OM=MA$.

Поскольку угол MA_1A прямой, то построение производим так: радиус OA делим в точке M пополам и на отрезке AM, как на диаметре, строим окружность. Точка ее пересечения с меньшей из данных окружностей и будет точкой A_1. Очевидно, что задача возможна только при $OA \leqslant 2OA_1$.

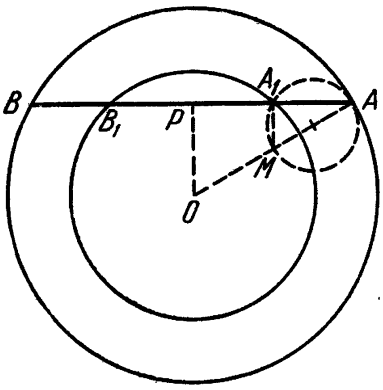

Рис. 117.

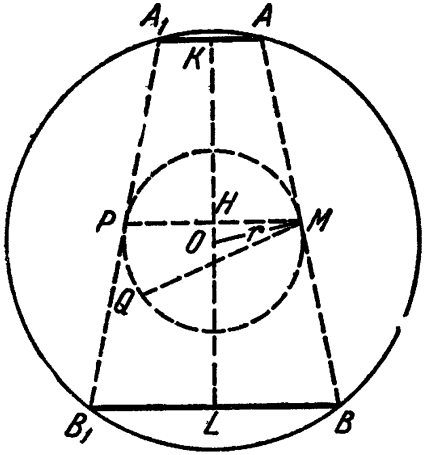

Рис. 118.

547. Проводим хорду AB и вспомогательную окружность, концентрическую с данной окружностью (рис. 118), которая касается хорды AB в ее середине M. Далее из точки M, как из центра, радиусом, равным половине отрезка a, описываем дугу, пересекающую вспомогательную окружность в точках P и Q. Хорды AA_1 и BB_1, проведенные параллельно MP или MQ, — искомые.

Действительно, так как $AA_1 \| BB_1$ и $MP \| BB_1$, то прямая KL, которая проходит через центр O и перпендикулярна к хорде MP вспомогательной окружности, будет также перпендикулярна и к параллельным MP хордам AA_1 и BB_1 данной окружности и разделит эти хорды пополам, т. е.

$$AK=KA_1 \text{ и } BL=LB_1.$$

Поскольку A_1, P и B_1 являются точками, симметричными точкам A, M и B относительно KL, то отрезок A_1B_1 проходит через точку P, а четырехугольник AA_1B_1B — равнобочная трапеция, средняя линия которой есть отрезок MP, а следовательно,

$$AA_1+BB_1=2MP=2\cdot\frac{a}{2}=a.$$

Если обозначим радиус OM вспомогательной окружности через r, то легко усмотреть, что:

если $a > 4r$, то задача невозможна,

если $a = 4r$, то задача имеет единственное решение (в этом случае четырехугольник AA_1B_1B — прямоугольник),

если $a < 4r$, то задача имеет два решения (одинаковых).

548. Проводим вспомогательную прямую GH (рис. 119), которая пересекает стороны AB и BC угла ABC в точках K и L и перпендикулярна к DE. Через точку B и середину M отрезка KL проводим прямую, которая пересекает DE в точке O. Через точку O проводим прямую P_1Q_1, перпендикулярную к прямой DE. Эта прямая пересекает прямые AB и BC в точках P и Q.

Отрезок PQ является искомым. Действительно, его концы P и Q упираются своими концами в стороны AB и BC угла ABC; PQ перпендикулярен к DE по построению и $PO:OQ = KM:ML$ в силу гомотетии (B — центр гомотетии). Но так как по построению $KM = ML$, то и $PO = OQ$.

Итак, отрезок PQ удовлетворяет всем требованиям задачи.

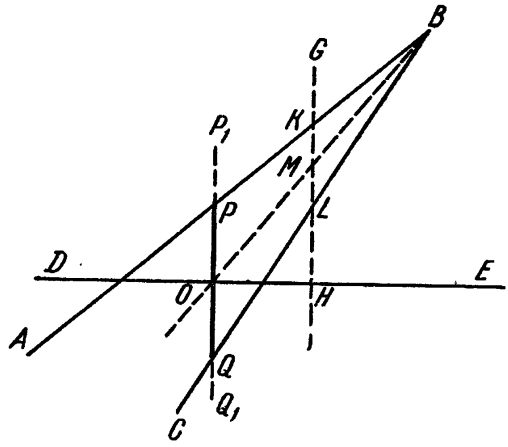

Рис. 119.

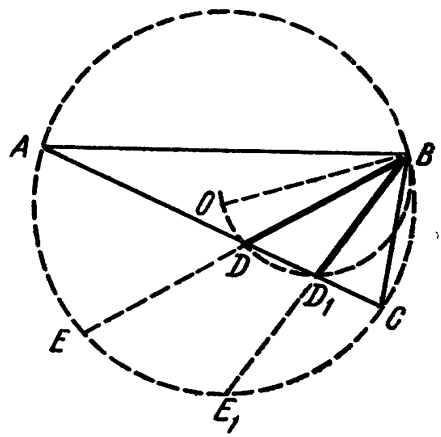

Рис. 120.

549. Опишем около данного треугольника окружность O (рис. 120). Пусть BD — искомый отрезок, т. е.

$$BD^2 = AD \cdot DC. \qquad (1)$$

Продолжив BD до пересечения с окружностью в точке E, имеем

$$BD \cdot DE = AD \cdot DC. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), находим

$$BD = DE.$$

Отсюда заключаем, что та из хорд описанной окружности дает искомое решение задачи, которая делится основанием (AC) данного треугольника пополам. А так как геометрическое место середин всех хорд, проведенных из точки B, есть окружность, имеющая диаметром радиус OB (задача 536), то решение сводится к построению этой окружности.

В общем случае задача может иметь два решения BD и BD_1, когда окружность на диаметре OB пересекается основанием AC треугольника ABC; одно решение, когда она касается основания, и ни одного решения, когда она лежит вне основания.

550. Пусть шар движется сначала по направлению MA, затем по AB и, наконец, по BM (рис. 121). Очевидно, что

$$\angle MAO=\angle OAB=\angle ABO=\angle OBM,$$
$$\angle MAB=\angle MBA \text{ и } MO\perp AB.$$

Обозначим OC через x и MA через y. Имеем

$$\frac{y}{d}=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{x},$$

$$y^2=R^2-x^2+(d+x)^2=R^2+2dx+d^2.$$

Из этих двух равенств получаем, что $2dx^2+R^2x-R^2d=0$, откуда находим x.

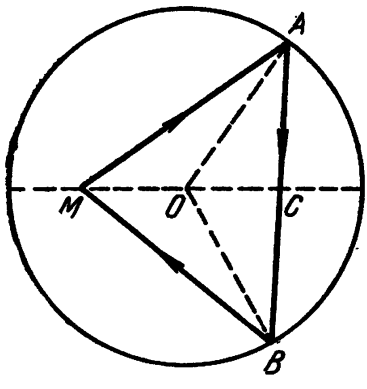

Рис. 121.

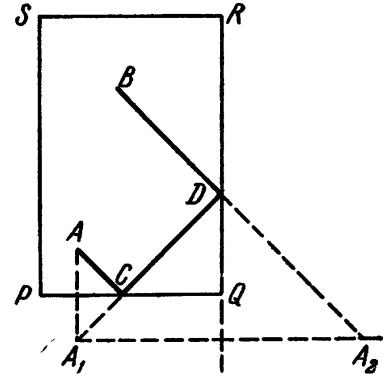

Рис. 122.

551. Пусть искомый путь будет $ACDB$ (рис. 122). Точка A_1 симметрична A относительно PQ; точка A_2 симметрична точке A_1 относительно RQ; DA_2—продолжение BD. Длина пути—BA_2, так как $DA_2=DA_1=DC+CA_1$, а $CA_1=CA$.

Отсюда и построение. Отражаем точку A в точку A_1 относительно PQ, потом отражаем A_1 в точку A_2 относительно RQ. Соединяя A_2 с B, получаем точку D, затем, соединяя точки A_1 и D, получаем точку C *).

552. Предположим, что задача решена, т. е. шар A отразился последовательно от каждого из бортов в точках C, D, E и F и ударил шар B (рис. 123). Как известно, угол падения равен углу отражения, поэтому

$$\angle KCA=\angle NCD \quad (1)$$

и

$$\angle NDC=\angle MDE. \quad (2)$$

*) Вообще говоря, задача имеет не одно решение, так как пару бортов можно выбрать $4\cdot3=12$ способами.

Ударяясь о борт LM, шар отразится в точке E под тем же углом, под каким он ударился об этот борт, следовательно,

$$\angle MED = \angle LEF. \tag{3}$$

Аналогично,

$$\angle LFE = \angle BFK. \tag{4}$$

Если построить точку A_1, симметричную точке A относительно борта (прямой) KN, то получим равнобедренный треугольник CAA_1, и прямая KN является биссектрисой угла ACA_1, т. е.

$$\angle KCA_1 = \angle KCA. \tag{5}$$

В силу (1) и (5) заключаем, что

$$\angle KCA_1 = \angle NCD.$$

Учитывая, что эти углы имеют общую вершину, их стороны KC и CN образуют одну прямую KN, а расположены эти углы по разные стороны от KN, легко убедиться, что отрезки A_1C и CD лежат на одной прямой, т. е. точка A_1 лежит на продолжении отрезка DC.

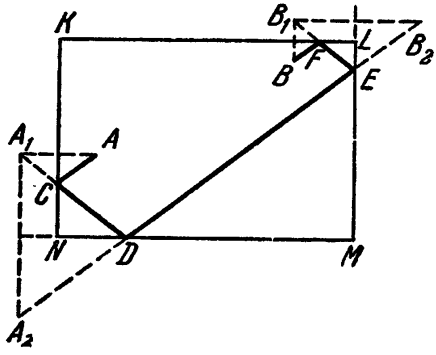

Рис. 123.

Построив точку A_2, симметричную точке A_1 относительно MN, легко доказать, что точка A_2 лежит на продолжении DE, а AC параллельна DE. Потом, построив точку B_1, симметричную точке B относительно KL, и точку B_2, симметричную точке B_1 относительно LM, мы убедимся, что точка B_2 лежит на продолжении отрезка DE и что BF параллельна DE. Следовательно, прямая, проходящая через точки A_2 и B_2, совпадает с прямой, на которой лежит отрезок DE, и поэтому AC параллельна A_2B_2.

Отсюда и построение. Строим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой KN, затем строим точку A_2, симметричную точке A_1 относительно прямой MN, далее строим точку B_1, симметричную точке B относительно прямой KL, и, наконец, строим точку B_2, симметричную точке B_1 относительно прямой LM.

Итак, надо направить шар A по прямой AC, параллельной A_2B_2 *).

553. Пусть AB—один из диаметров окружности с центром O (рис. 124). Через точку A проведем перпендикуляр к AB и отложим на нем отрезок AC, равный диаметру AB. Отрезок CO пере-

*) Вообще говоря, задача имеет не одно решение. Ясно, что задача не может иметь более $4! = 24$ решений. Из этих 24 вариантов выбираются лишь те, для которых все точки ударов лежат на самих бортах, а не на их продолжениях.

секает окружность в точке D. Проведем прямую DE, перпендикулярную к CO, до пересечения с продолжением диаметра BA в точке E. Точка E — искомая. Действительно, DE — касательная, так как она перпендикулярна к радиусу OD в конце его; а из равенства прямоугольных треугольников ODE и CAO заключаем, что $ED=AC$. Но так как $AC=AB$, то $ED=AB$.

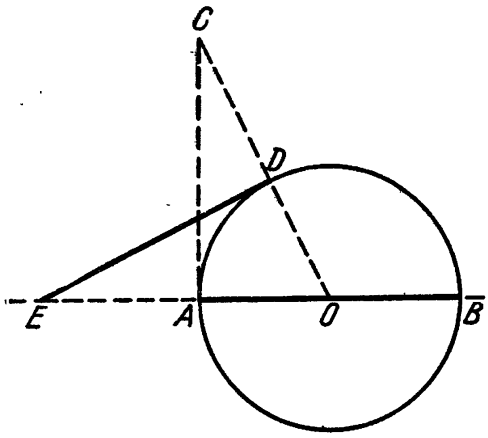

Рис. 124.

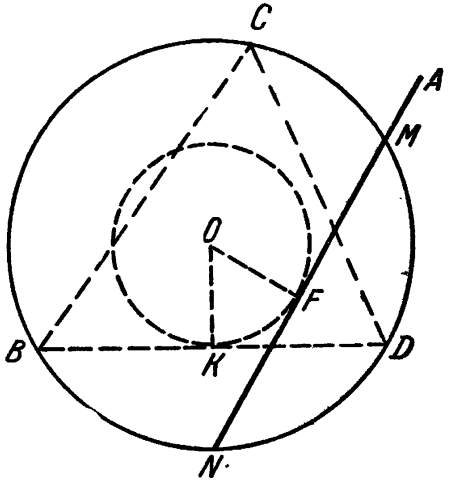

Рис. 125.

554. В данный круг вписываем данный угол BCD (рис. 125). Затем проводим концентрическую окружность, касательную к хорде BD. Из заданной точки A проводим касательную AMN к внутренней окружности. Прямая AMN — искомая секущая. Действительно, хорды BD и MN равны, так как они равноудалены от центра, а поэтому и дуги BCD и MCN также равны.

555. Первое решение. Строим две равные окружности O и O_1, касающиеся в точке D (рис. 126) диаметра длиной k. Из конца B диаметра одной окружности радиусом, равным a, делаем засечку на второй окружности (в точке C). Точку C соединяем отрезком с точкой D и отрезок CD продолжаем до пересечения с первой окружностью в точке A. Треугольник ABC — искомый, так как в нем угол A прямой (опирается на диаметр длиной k), гипотенуза $CB=a$, $BD=k$ — медиана катета AC. Равенство $CD=AD$ вытекает из равенства треугольников DOA и DO_1C.

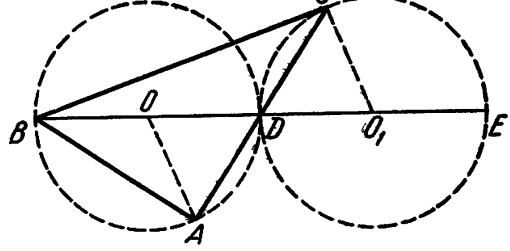

Рис. 126.

Второе решение. На отрезке $BC=a$, как на диаметре, построим окружность O (рис. 127). На отрезке OC, как на диаметре, построим окружность O_1 (геометрическое место середин хорд, проведенных из точки C).

Из точки B, как из центра, проводим дугу окружности радиуса k, пересекающую окружность O_1 в точке M. Проводим через точки C и M хорду CA. Треугольник ABC — искомый.

556. Строим вспомогательный произвольный прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами, равными a. Пусть расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис этого вспомогательного треугольника равно b. Обозначим катет искомого прямоугольного треугольника через x.

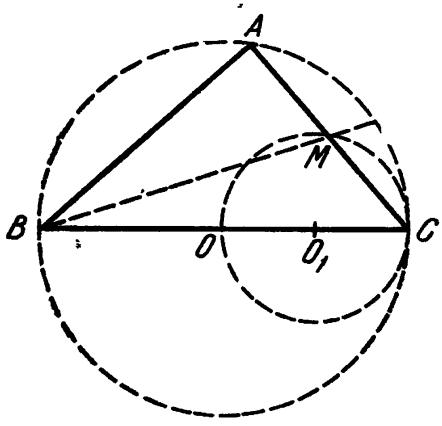

Рис. 127.

Так как все равнобедренные прямоугольные треугольники подобны и поскольку в подобных фигурах отношение сходственных линейных элементов равно отношению сходственных сторон, то имеем

$$x:a=m:b,$$

откуда

$$x=\frac{am}{b}.$$

Отрезок x легко построить, как четвертый пропорциональный отрезок. Итак, мы определили катет x искомого треугольника. Зная катет, можем построить искомый равнобедренный треугольник.

Эту задачу можно обобщить. Вместо прямоугольного равнобедренного треугольника можно взять равнобедренный треугольник с данным углом при вершине.

557. Строим отрезок $AB=a$, потом проводим прямую EF, параллельную основанию AB и отстоящую от основания на расстояние, равное высоте h (рис. 128). Далее, строим прямую MN, равноотстоящую от параллельных прямых EF и AB. Потом из точки A, как из центра, радиусом, равным медиане m, проводим дугу, которая пересекает прямую MN в точках D и D_1. И, наконец, проводим прямые BD и BD_1, которые пересекают прямую EF в точках C и C_1. Эти точки и являются вершинами искомых треугольников.

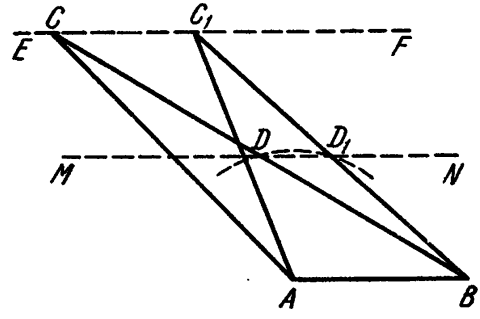

Рис. 128.

Итак, мы получили два треугольника ABC и ABC_1, которые удовлетворяют условию задачи.

Мы получили два решения, так как мы взяли такие отрезки m и h, которые удовлетворяют зависимости $m>\frac{h}{2}$, и вследствие этого проведенная нами дуга пересекла прямую MN в двух точках, что и определило два решения.

Если же $m=\frac{h}{2}$, то тогда, очевидно, будет только одно решение, а если $m<\frac{h}{2}$, то не будет ни одного решения.

558. Пусть $b+c=m$ и $\angle B-\angle C=\alpha$. Допустим, что треугольник ABC (рис. 129) удовлетворяет требованиям задачи, так что

$$BC=a,\quad AC+AB=b+c=m \quad \text{и} \quad \angle B-\angle C=\alpha.$$

Выпрямим сумму искомых сторон. Для чего на продолжении CA отложим $AE=AB$

$$\angle ABE=\frac{\angle BAC}{2},$$

так как $\angle BAC$ — внешний по отношению к равнобедренному треугольнику BAE ($AB=AE$). Следовательно,

$$\angle CBE=\angle CBA+\frac{\angle BAC}{2}=\angle CBA+90^\circ-\frac{\angle CBA+\angle BCA}{2}=$$

$$=90^\circ+\frac{\angle CBA-\angle BCA}{2}=90^\circ+\frac{\alpha}{2}.$$

Итак, в треугольнике CBE известны две стороны ($BC=a$ и $EC=m$) и угол CBE, противолежащий большей из них.

Построив треугольник CBE, определим вершину A как точку пересечения отрезка CE и перпендикуляра KA, проведенного к отрезку BE через его середину K.

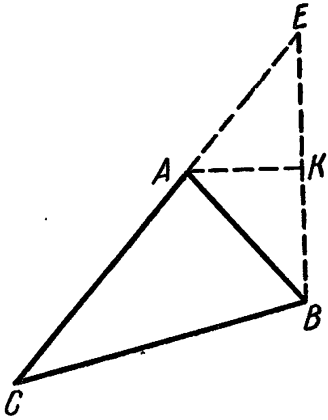

Рис. 129.

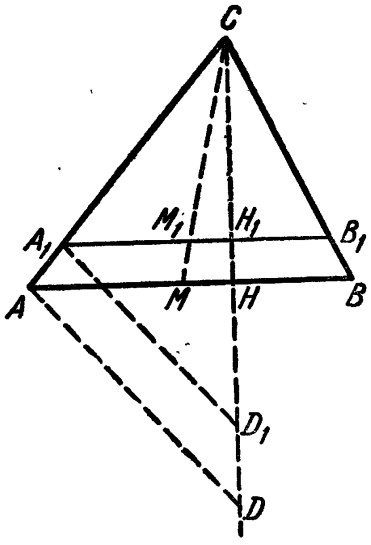

Рис. 130.

559. Строим треугольник A_1CB_1, содержащий данные углы и, следовательно, подобный искомому (рис. 130). Проведя в нем высоту CH_1 и медиану CM_1, откладываем их сумму CD_1, которая

(вообще) не равна m. Откладывая $CD=m$, увеличиваем (уменьшаем) размеры треугольника в отношении $m:CD$, для чего проводим $DA \parallel D_1A_1$ и $AB \parallel A_1B_1$ и получаем искомый треугольник ABC.

560. Первое решение. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 131), у которого $AC=b$, $BC=a$ и биссектриса $CD=l_C$.

По свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$$\frac{AD}{DB}=\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Строим точку B_1, симметричную с вершиной B относительно биссектрисы CD. Далее, проводим отрезок DD_1, перпендикулярный к CD, т. е. параллельный BB_1, тогда

$$\frac{AD_1}{D_1B_1}=\frac{AD}{DB}. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) имеем

$$\frac{AD_1}{D_1B_1}=\frac{b}{a}.$$

Итак, точкой D_1 отрезок AB_1 (разность сторон AC и BC) делится в отношении $b:a$. Поэтому отрезок AD_1 может быть построен, а этим определяется и длина отрезка D_1C.

В треугольнике CD_1D известны, таким образом, катет CD и гипотенуза CD_1. Построив его, легко построить и искомый треугольник ABC.

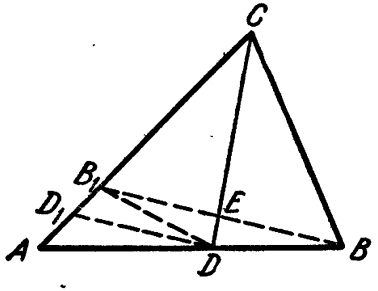

Рис. 131.

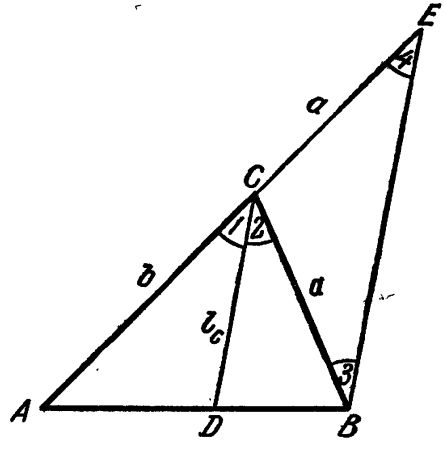

Рис. 132.

Второе решение. Пусть треугольник ABC — искомый ($BC=a$, $AC=b$, $CD=l_C$). Через вершину B проводим прямую BE, параллельную CD, до пересечения с продолжением AC в точке E (рис. 132). Так как $\angle 3=\angle 2$, $\angle 4=\angle 1$ и $\angle 2=\angle 1$, то $\angle 3=\angle 4$, следовательно, $CE=BC=a$.

Из подобия треугольников ADC и ABE имеем

$$\frac{BE}{l_C}=\frac{a+b}{b}.$$

Построив отрезок BE как четвертый пропорциональный, строим треугольник BCE, а затем, отложив на продолжении EC отрезок $CA=b$, построим третью вершину A искомого треугольника.

561. Пусть треугольник ABC — искомый (рис. 133). Продолжим медиану AP на отрезок $PK=OP$, где O — точка пересечения медиан. Ясно, что

$$BK=OC=\frac{2}{3}CQ \quad \text{и} \quad PK=\frac{1}{3}AP.$$

Зная BK и PK, можем приступить к построению. На отрезке AP строим сегмент, вмещающий данный угол ABC. Далее продолжаем AP на PK. Потом из точки K, как из центра, опишем дугу радиуса KB. Точка B пересечения построенных дуг определяет вершину B искомого треугольника.

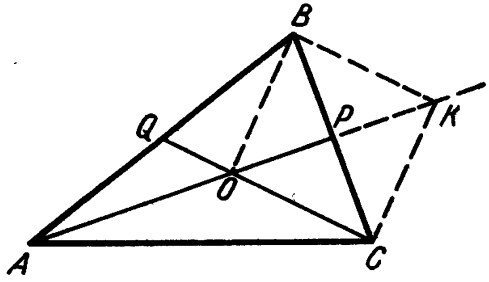

Рис. 133.

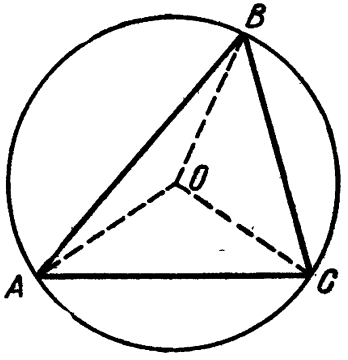

Рис. 134.

Итак, мы уже имеем две вершины (A и B) искомого треугольника. Продолжая отрезок BP на его длину, найдем третью вершину C искомого треугольника.

562. Первое решение. Строим окружность радиуса R с центром O (рис. 134). Предположим, что треугольник ABC — искомый. Угол BOC равен удвоенному углу BAC, а угол AOC равен удвоенному углу ABC. Отсюда и построение. Строим углы BOC и AOC, равные соответственно удвоенным углам BAC и ABC. Стороны этих углов пересекают окружность в точках (A, B и C), которые являются вершинами искомого треугольника.

Второе решение. Строим произвольный треугольник $A_1B_1C_1$, углы которого равны данным (рис. 135), и описываем около него окружность с центром O.

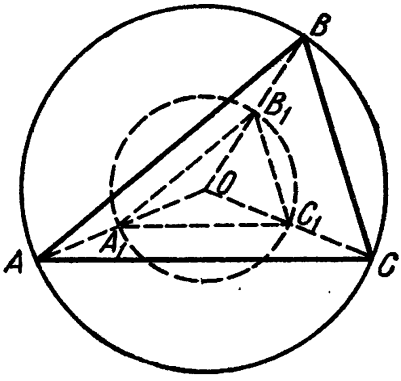

Рис. 135.

Из того же центра O описываем окружность данного радиуса R. Продолжим радиусы OA_1, OB_1, OC_1 до пересечения с окружностью радиуса R в точках A, B, C. Треугольник ABC — искомый.

Третье решение (рис. 136). Пусть α, β, γ—углы искомого треугольника. Построим диаметр $MC=2R$, а затем углы $\angle CMB=\alpha$ и $\angle CMA=\beta$. Треугольник ABC—искомый.

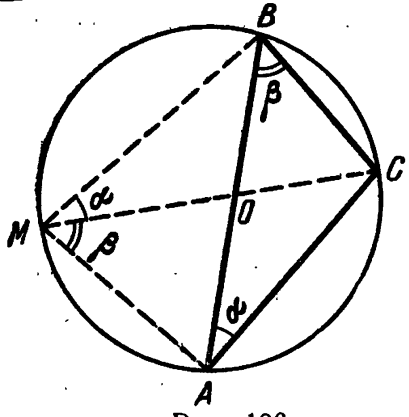

Рис. 136.

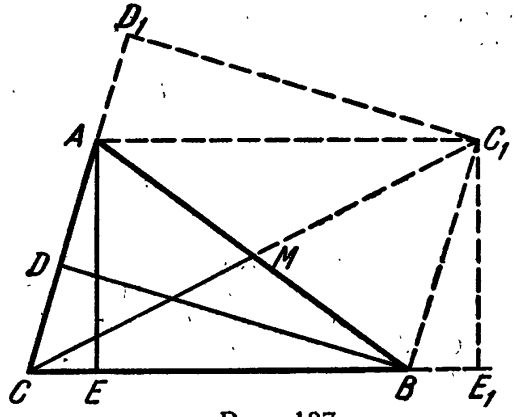

Рис. 137.

563. Пусть $AE=h_a$, $BD=h_b$, $CM=m_c$ (рис. 137). Отложим на продолжении CM отрезок $MC_1=CM$ и опустим из точки C_1 перпендикуляры C_1E_1 и C_1D_1 соответственно на прямые CB и CA. Четырехугольник $ACBC_1$—параллелограмм, а поэтому $C_1E_1=AE=h_a$ и $C_1D_1=BD=h_b$. Кроме того, так как $\angle CD_1C_1=\angle CE_1C_1=90°$, то окружность, описанная на отрезке CC_1, как на диаметре, проходит через точки E_1 и D_1. Отсюда вытекает построение.

Отложив на произвольной прямой отрезок $CC_1=2m_c$, строим на нем, как на диаметре, окружность. Затем по разные стороны диаметра CC_1 производим из точки C_1 засечки E_1 и D_1 соответственно радиусами h_a и h_b.

Далее проводим из точки C_1 прямые C_1B и C_1A, параллельные соответственно прямым CD_1 и CE_1, до пересечения с прямыми CE_1 и CD_1 соответственно в точках B и A.

Треугольник ABC—искомый.

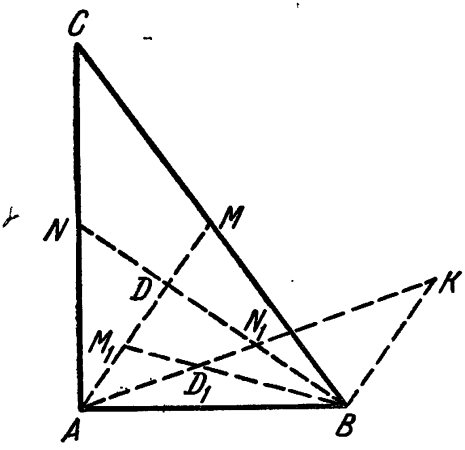

Рис. 138.

564. Пусть $AM=m_a$ и $BN=m_b$, $AM\perp BN$ (рис. 138). Обозначим через D точку пересечения медиан, а через M_1 и N_1 — соответственно середины отрезков AD и BD. Так как точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении 1:2, считая от соответствующей стороны, то

$$AM_1=M_1D=DM$$

и

$$BN_1=N_1D=DN.$$

Легко усмотреть, что треугольники ANN_1 и BMM_1 равнобедренные. Следовательно,

$$AN_1=AN=\frac{b}{2},\qquad BM_1=BM=\frac{a}{2}.$$

Таким образом, задача сводится к построению прямоугольного треугольника ADB по медианам $BM_1=\frac{a}{2}$ и $AN_1=\frac{b}{2}$, проведенным к его катетам. Точку пересечения этих медиан обозначим через D_1. Ясно, что

$$D_1N_1=\frac{1}{3}\,AN_1=\frac{b}{6}$$

и

$$D_1B=\frac{2}{3}\,BM_1=\frac{a}{3}\,.$$

Продолжим AN_1 на отрезок $N_1K=AN_1$ и проведем KB. Из равенства треугольников ADN_1 и N_1KB следует, что угол N_1BK прямой. Из вышеизложенного вытекает построение.

Отложив $AK=b$, делим AK точкой N_1 пополам. Затем описываем на N_1K, как на диаметре, полуокружность Потом на отрезке N_1A откладываем $N_1D_1=\frac{b}{6}=\frac{1}{3}\,AN_1$ и затем из точки D_1 на построенной полуокружности производим засечку радиусом $\frac{a}{3}$ в точке B. Далее, опустив из точки A перпендикуляр AD на прямую BN_1, откладываем на продолжениях прямых AD и BD соответственно части $ND=\frac{BD}{2}$ и $MD=\frac{AD}{2}$. Наконец, продолжив AN и BM до их пересечения в точке C, получим искомый треугольник.

565. Так как стороны треугольника обратно пропорциональны проведенным к ним высотам, то

$$a:b=h_b:h_c=n:m;\quad b:c=p:n=m:\frac{mn}{p}\,,$$

откуда следует

$$a:b:c=n:m:\frac{mn}{p}\,,$$

т. е. стороны искомого треугольника a, b, c пропорциональны отрезкам n, m и $\frac{mn}{p}$. Последний отрезок легко построить как четвертый пропорциональный отрезок. Поэтому искомый треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, стороны которого равны n, m и $\frac{mn}{p}$. Теперь обозначим через P_1 периметр ортоцентрического треугольника, построенного в треугольнике $A_1B_1C_1$. Поскольку в подобных фигурах сходственные линейные элементы пропорциональны сходственным сторонам, то

$$\frac{P}{P_1}=\frac{a}{n}\,,$$

откуда

$$a=\frac{Pn}{P_1}\,. \qquad (1)$$

Итак, для построения искомого треугольника ABC строим раньше треугольник $A_1B_1C_1$ по сторонам n, m, $\frac{mn}{p}$, проводим в нем высоты, потом находим периметр P_1 ортоцентрического треугольника, строим сторону a по формуле (1), а затем строим треугольник ABC по стороне a и углам $B=B_1$, $C=C_1$. Для того чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы из отрезков n, m, $\frac{mn}{p}$ можно было построить треугольник.

566. Пусть O—центр вписанного круга (рис. 139). Так как

$$\angle OAD=\frac{A}{2},\ \angle OCD=\frac{C}{2},$$

то

$$\angle AOC=\pi-\frac{A+C}{2}=\pi-\frac{\pi-\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}. \qquad (1)$$

Из этого равенства вытекает построение: на отрезке строим сегмент, вмещающий угол $\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}$. Проводим из точки D перпендикуляр до встречи в точке O с дугой этого сегмента. Далее описываем из O радиусом OD окружность и из точек A и C проводим к ней касательные до их пересечения в точке B. Треугольник ABC—искомый.

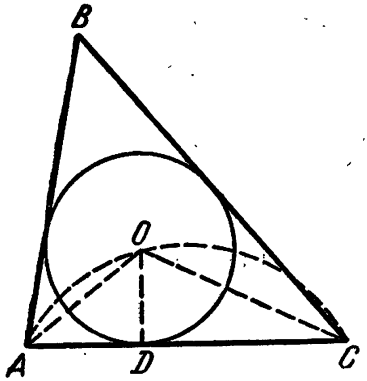

Рис. 139.

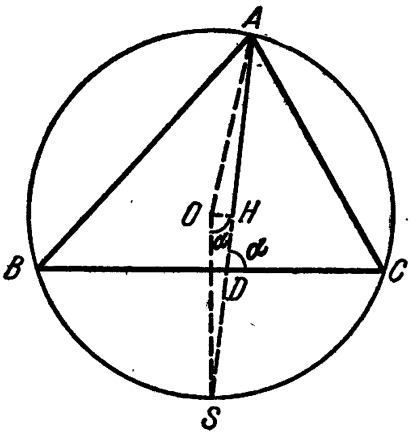

Рис. 140.

567. Предположим, что задача решена.

Пусть O—центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 140), S—точка, в которой продолжение биссектрисы AD встречает окружность, OH—высота треугольника AOS. Ясно, что дуги BS и CS равны, а поэтому OS перпендикулярно к BC; кроме того, $OA=OS=R$.

Из рисунка легко усмотреть, что $\angle SOH=\angle ADC=\alpha$, откуда

$$\angle AOS=2\alpha.$$

Из вышеизложенного вытекает построение.

Строим равнобедренный треугольник AOS по боковым сторонам $AO=SO=R$ и углу между ними 2α. На стороне AS откладываем отрезок AD, равный l. Далее строим угол $ADC=\alpha$.

Наконец, проводим окружность O радиуса R. Эта окружность пересекает прямую DC в точках B и C, которые и являются вершинами искомого треугольника ABC. Для возможности задачи необходимо и достаточно условие $AD=l<AS$. В предельном случае, когда $\alpha=90°$, остается в силе то же построение.

568. Обозначим площадь треугольника ABC (рис. 141) через S, сторону BC через a, точки касания вписанного круга и сторон AB и AC через M и N. Имеем $2S=2pr=ah$, откуда

$$a=\frac{2pr}{h}. \tag{1}$$

Также имеем

$$AM=AN=p-a. \tag{2}$$

Таким образом, для построения стороны BC искомого треугольника достаточно [см. (1)] найти четвертую пропорциональную к величинам $2p$, r и h. Для построения угла A искомого треугольника достаточно отложить [см. (2)] отрезок $MA=p-a$ на касательной к окружности O, где M — точка касания. Из полученной точки A проводим вторую касательную.

Итак, мы построили угол A.

Теперь задача свелась к построению треугольника ABC по основанию a, по высоте h и по углу A при вершине.

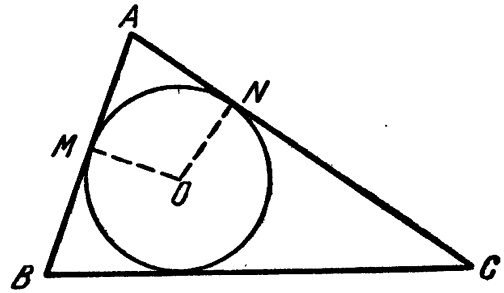

Рис. 141.

На отрезке $BC=a$ строим сегмент, вмещающий угол A, потом проводим прямую L, параллельную BC и отстоящую от BC на расстоянии h. Точка пересечения прямой L с дугой сегмента определяет вершину A искомого треугольника. Если прямая L пересекает дугу сегмента в двух точках, то получим два равных треугольника, если L касается дуги сегмента, то получаем один треугольник, а если L не пересекает дугу сегмента, то задача невозможна.

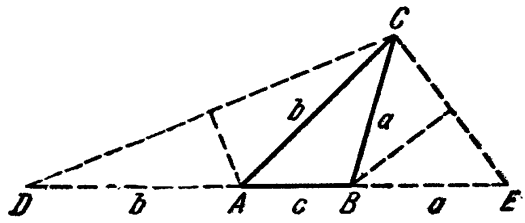

Рис. 142.

569. Предположим, что треугольник ABC — искомый (рис. 142), и пусть его стороны $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Продолжив в обе стороны отрезок $AB=c$, отложим на нем отрезки $AD=b$ и $BE=a$ и соединим вершину C с точками D и E, тогда

$$DE=a+b+c,\quad \angle D=\frac{1}{2}\angle A,\quad \angle E=\frac{1}{2}\angle B.$$

Отсюда и построение. На произвольной прямой откладываем отрезок DE, равный периметру треугольника, строим по одну сторону от прямой DE углы D и E, равные соответственно половинам углов A и B. Точка C пересечения сторон этих углов является одной из вершин искомого треугольника. Далее из середин отрезков DC и EC проводим к ним перпендикуляры до пересечения с прямой DE в точках B и A. Точки A и B являются вершинами искомого треугольника.

Искомый треугольник можно построить и так: строим произвольный треугольник с углами A и B. Этот треугольник подобен искомому.

Известно, что периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны, поэтому делим периметр искомого треугольника на части, пропорциональные сторонам вспомогательного треугольника. Эти части будут являться сторонами искомого треугольника.

570. Предположим, что задача решена. Опишем около треугольника ABC (рис. 143) окружность с центром O и проведем биссектрисы $AN=l_1$, $AP=l_2$ и медиану AM треугольника ANP.

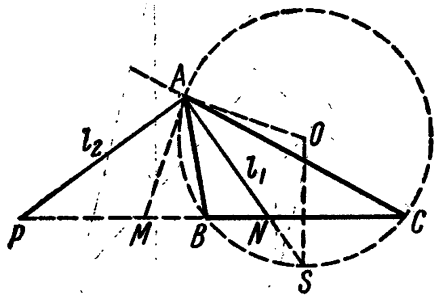

Рис. 143.

Так как

$$AN \perp AP,$$

то

$$AM=MP \text{ и } \angle PAM=\angle APM.$$

Продолжение биссектрисы AN пересекает дугу BC в точке S, а потому $OS \perp BC$, так как S — середина $\cup BSC$. Следовательно, острый угол OSA составлен прямыми, перпендикулярными к сторонам угла APC, откуда следует, что $\angle OAS=\angle OSA=\angle APM=\angle PAM$.

Теперь очевидно, что $\angle OAM=90°$. Следовательно, окружность касается AM в точке A.

Отсюда вытекает построение: строим прямоугольный треугольник NAP по катетам $AN=l_1$ и $AP=l_2$, проводим его медиану AM, восставляем из A перпендикуляр $AO=R$ к AM (так, чтобы точки O и N лежали по одну сторону от AM) и из точки O радиусом OA описываем окружность. Пусть эта окружность пересекает NP в точках B и C. Легко убедиться, что треугольник ABC — искомый.

571. Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 144) так, что $BC=a$, $\angle BAC=\alpha$, $OE=r$. Для того чтобы построить искомый треугольник, достаточно определить положение центра O вписанного круга относительно стороны BC.

Так как расстояние точки O от BC должно иметь данную величину r, то O находится на прямой MN, проведенной параллельно BC на данном расстоянии r от нее. С другой стороны, можно определить угол, под которым данная сторона (BC) видна из искомой точки O. Соединяя отрезками O с B и C, мы получаем треугольник OBC, у которого углы при вершинах B и C равны половинам углов ABC и ACB при тех же вершинах, так как центр

вписанного круга находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника. Сумма углов ABC и ACB равна $2d-\alpha$, следовательно, сумма углов OBC и OCB равна

$$(2d-\alpha):2=d-\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, $\angle BOC=2d-\left(d-\frac{\alpha}{2}\right)=d+\frac{\alpha}{2}$. Построив на отрезке BC сегмент, вмещающий угол $d+\frac{\alpha}{2}$, мы обнаружим точку O пересечения дуги сегмента с прямой MN. Эта точка O—центр вписанного круга. Построив окружность с центром O и радиусом r, проводим к ней касательные из точек B и C. Точка A пересечения этих касательных есть третья вершина искомого треугольника.

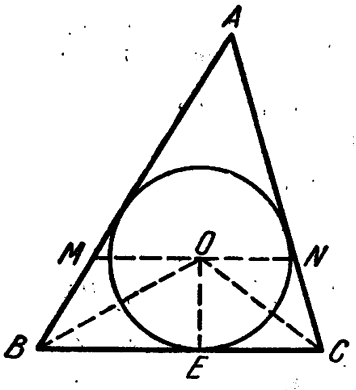

Рис. 144.

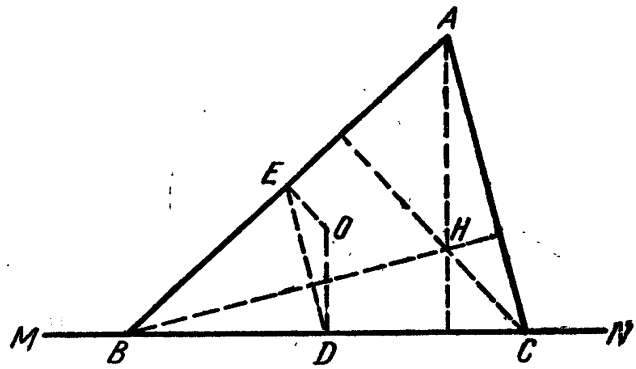

Рис. 145.

572. Предположим, что задача решена (рис. 145). Опустим из центра O перпендикуляры OD и OE на стороны BC и AB искомого треугольника ABC. Так как треугольники ODE и HCA подобны как треугольники с соответственно параллельными сторонами и поскольку

$$DE=\frac{AC}{2}, \text{ то } OD=\frac{AH}{2}.$$

Кроме того, так как центр O описанной окружности и ортоцентр H находятся одновременно либо внутри, либо вне треугольника ABC, то отрезки OD и AH не только параллельны, но и одинаково направлены.

Из вышеизложенного вытекает построение. Из точки O проводим в направлении AH отрезок OD, параллельный AH и равный его половине; затем проводим через точку D прямую MN, перпендикулярную к AH, и из точки O радиусом OA делаем на прямой MN засечки B и C. Треугольник ABC—искомый.

Если задача имеет решение, то оно единственное. Необходимым и достаточным условием существования решения является условие $OA>OD$, или $OA>\frac{AH}{2}$.

573. Пусть MN — искомый отрезок (рис. 146). Тогда

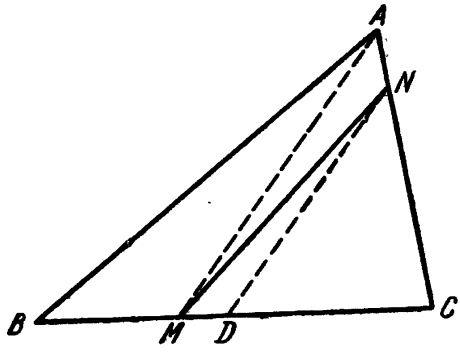

Рис. 146.

$$\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{MC\cdot CN}{BC\cdot AC}=\frac{1}{2}.$$

Если точка D — середина отрезка BC, то

$$\frac{MC\cdot CN}{2DC\cdot AC}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{MC}{DC}=\frac{AC}{CN}.$$

Для построения отрезка CN проводим MA и DN, параллельную MA. Затем строим отрезок MN.

Глава XIV

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

574. Докажем, что в данную пирамиду можно вписать шар (рис. 147). Пусть SDB — биссекторная плоскость двугранного угла $ASDC$ и двугранного угла $ABSC$. Построим $MCDN$ — биссекторную плоскость двугранного угла $SCDA$. Прямая MD — линия пересечения этих двух биссекторных плоскостей, так как она принадлежит им обеим.

Построим $KABF$ — биссекторную плоскость двугранного угла $SABC$. Пусть BK — линия пересечения этой плоскости с плоскостью SBD. Прямые MD и BK, лежащие в плоскости SBD, пересекаются в точке O, равноудаленной от всех граней пирамиды. Следовательно, точка O — центр шара, вписанного в пирамиду.

Пусть V — объем пирамиды, S — полная поверхность ее, r — радиус вписанного шара, тогда

$$r=\frac{3V}{S}. \qquad (1)$$

Действительно, если данную пирамиду разбить на 5 пирамид с общей вершиной O и основаниями $ABCD$, SAB, SBC, SCD и SDA, то высотой каждой из них служит радиус вписанного шара. Следовательно,

$$V=\frac{r}{3}(S_{ABCD}+S_{SAB}+S_{SBC}+S_{SCD}+S_{SDA}),$$

т. е. равенство (1) справедливо.

Пусть $SB=H$ — высота пирамиды, a — сторона основания. Из треугольника SBD имеем

$$H=a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно,

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{3}. \qquad (2)$$

Из треугольника SAB находим

$$SA=\sqrt{a^2+2a^2\operatorname{tg}^2\beta}=a\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Далее, $SC=SA$ как наклонные, исходящие из одной точки и имеющие равные проекции.

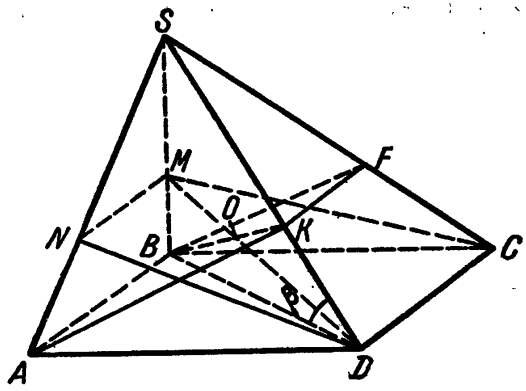

Рис. 147.

Так как $AB\perp AD$, то $SA\perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах); по аналогии $SC\perp CD$. Итак,

$$S=a^2+a^2\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta+a^2\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}, \qquad (3)$$

или

$$S=a^2(1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}).$$

Поэтому, учитывая (1), (2) и (3), получаем

$$r=\frac{3V}{S}=\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}.$$

Отв. $\dfrac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta}}$.

575. $SABC$ — данная пирамида; SD — высота ее (рис. 148). В предыдущей задаче мы установили, что

$$r=\frac{3V}{S_{\text{полн}}}.$$

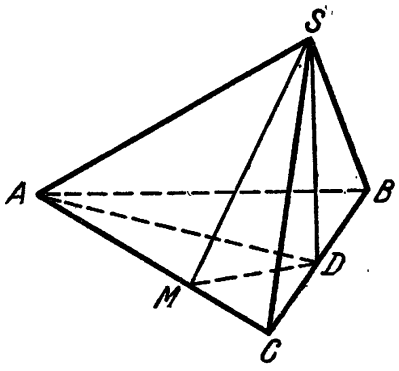

Рис. 148.

Из прямоугольного треугольника ADC находим, что

$$AD=\sqrt{5^2-3^2}=4,$$

следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=3\cdot 4=12,$$

а объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SD=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 1=4.$$

Проводим $SM\perp AC$; тогда $DM\perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Так как треугольник ADC прямоугольный, то

$$DM=\frac{AD\cdot DC}{AC}=\frac{4\cdot 3}{5}=2{,}4.$$

В треугольнике SMD угол D прямой, поэтому

$$SM=\sqrt{MD^2+SD^2}=\sqrt{2{,}4^2+1^2}=2{,}6,$$

а следовательно,

$$S_{\triangle ASC}=S_{\triangle ASB}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2{,}6=\frac{13}{2}.$$

Найдем площадь треугольника BSC:

$$S_{\triangle BSC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1=3.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}}=S_{\triangle ABC}+2S_{\triangle ASC}+S_{\triangle BSC}=12+2\cdot\frac{13}{2}+3=28,$$

$$r=\frac{3V}{S_{\text{полн}}}=\frac{3\cdot 4}{28}=\frac{3}{7}.$$

Отв. $\frac{3}{7}$.

576. Пусть $SABC$ — данная пирамида (рис. 149), $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ и SO перпендикулярно к плоскости ABC. Введем обозначения $SO=h$, $\angle OSA=\alpha$, $\angle OSB=\beta$, $\angle OSC=\gamma$.

Если считать точку S вершиной прямоугольного параллелепипеда, ребра которого расположены на прямых SA, SB и SC, а диагональ расположена на прямой SO, то имеет место равенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Но $\cos\alpha=\frac{h}{a}$, $\cos\beta=\frac{h}{b}$, $\cos\gamma=\frac{h}{c}$.

Следовательно,

$$\frac{h^2}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1,$$

или

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

откуда

$$h=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}.$$

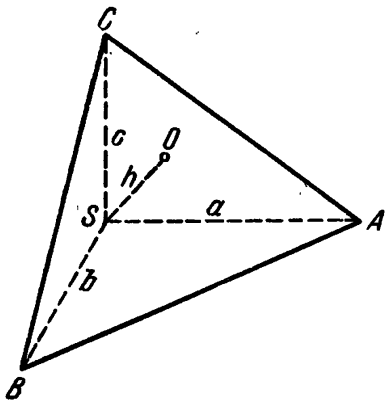

Рис. 149.

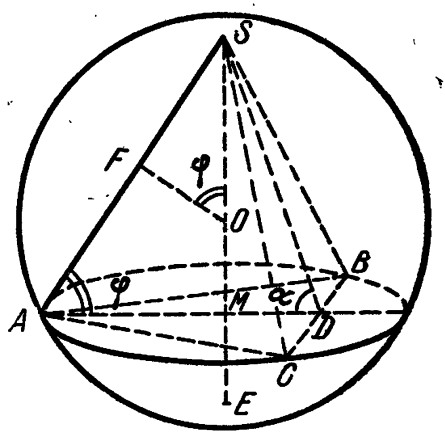

Рис. 150.

577. Пусть SM — высота пирамиды $SABC$, $\angle SAM=\varphi$ (рис. 150), тогда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{SM}{AM}=\frac{SM}{2MD}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Из центра O шара опустим перпендикуляр на боковое ребро SA. В треугольнике SOF

$$\angle F=90^\circ, \qquad \angle SOF=\varphi, \qquad OS=R,$$

$$SF=R\sin\varphi,$$

$$SA=2SF=2R\sin\varphi.$$

В прямоугольном треугольнике ASM

$$AM = 2R \sin\varphi \cos\varphi = R \sin 2\varphi.$$

Сторона основания

$$AB = AM\sqrt{3} = R\sqrt{3}\sin 2\varphi.$$

Учитывая (1), имеем

$$AB = R\sqrt{3}\,\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = R\sqrt{3}\,\frac{2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha}{1+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4R\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Ответ. $\dfrac{4R\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

578. Из рис. 151 усматриваем, что в треугольнике CDE

$$\angle E = 90°, \qquad \angle C = \beta, \qquad CD = d,$$

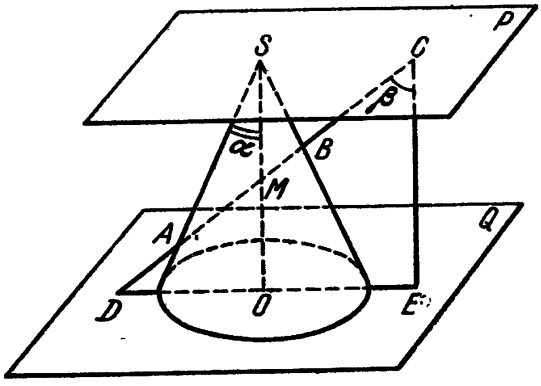

Рис. 151.

следовательно,

$$CE = d\cos\beta.$$

Таким образом,

$$SM = \frac{1}{2}CE = \frac{d}{2}\cos\beta.$$

В треугольнике ASM

$$\frac{AS}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{SM}{\sin(\beta-\alpha)},$$

следовательно,

$$AS = \frac{SM\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\cos\beta\sin\beta}{2\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\sin 2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)}.$$

В треугольнике ASB

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{AS}{\sin(\beta+\alpha)}.$$

Теперь легко определяем AB.

Ответ. $\dfrac{d}{4}\,\dfrac{\sin 2\alpha\sin 2\beta}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$.

579. Имеем OO_1—ось цилиндра (рис. 152), плоскость EFN параллельна плоскости BSD, поэтому $\angle FNM = \angle SDO_2 = \alpha$.

Пусть $OM = r$, тогда $OO_1 = 2r$.

Так как NO—биссектриса $\angle FNM$, то из треугольника MON находим

$$MN = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Но

$$AM = MN = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Далее,

$$O_2A = O_2M + AM,$$

т. е.

$$O_2A = r + r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (1)$$

В треугольнике SAO_2

$$O_2A = a \cos \alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем

$$r\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right) = a \cos \alpha,$$

откуда

$$r = \frac{a \cos \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

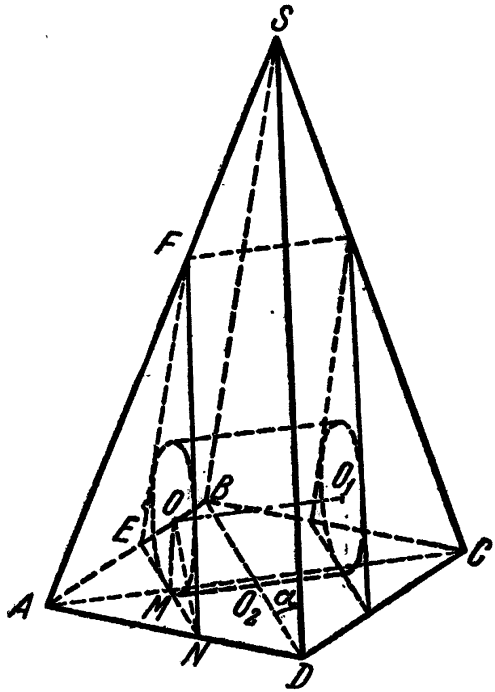

Рис. 152.

Отв. $r =$

$$= a \sin \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}\right).$$

580. Первый случай. Треугольник ASB—осевое сечение конуса (рис. 153). Отрезок MN—пересечение осевого сечения конуса с сечением конуса плоскостью, указанной в условии задачи, MN перпендикулярен к SB.

Пусть $OD = r$, тогда $SN = kr$. Очевидно, что $COFN$—квадрат. Обозначим $\angle SAD = \angle SOF = 2\alpha$, тогда $SD = AD \operatorname{tg} 2\alpha$.

Имеем

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi AD^2 \cdot SD = \frac{1}{3} \pi \cdot AD^3 \operatorname{tg} 2\alpha. \qquad (1)$$

Из треугольника AOD находим, что $AD=r\operatorname{ctg}\alpha$ (так как AO — биссектриса угла SAD), следовательно, (1) примет вид

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha.$$

Далее, так как $V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi r^3$, то

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^3\operatorname{ctg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha}{\frac{4}{3}\pi r^3},$$

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{4\operatorname{tg}^3\alpha}. \qquad (2)$$

Из треугольника SOF имеем

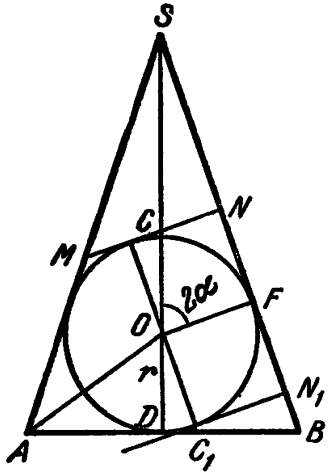

Рис. 153.

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{SF}{OF}=\frac{SN+NF}{OF}=\frac{kr+r}{r}=k+1,$$

или

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=k+1,$$

$$(k+1)\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-(k+1)=0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-1+\sqrt{1+(k+1)^2}}{k+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{k^2+2k+2}-1}{k+1}. \qquad (3)$$

Таким образом, из (2) и (3) получаем

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{(k+1)^4}{4\left(\sqrt{k^2+2k+2}-1\right)^3}.$$

Уничтожив иррациональность в знаменателе, получаем

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{\left(1+\sqrt{k^2+2k+2}\right)^3}{4(k+1)^2}.$$

Второй случай. Если плоскость, касательная к шару, пересекает образующую (перпендикулярную к этой плоскости в точке N_1), то $SN_1=kr$, а поэтому

$$SF=(k-1)r \text{ и } \operatorname{tg}2\alpha=k-1.$$

Заменив в преобразованиях первого случая $(k+1)$ на $(k-1)$, получим

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{(k-1)^4}{4\left(\sqrt{k^2-2k+2}-1\right)^3},$$

следовательно,

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шара}}}=\frac{(1+\sqrt{k^2-2k+2})^3}{4(k-1)^2}.$$

581. Пусть C, D, E—центры шаров (рис. 154), r—радиус каждого шара

$$CE=CD=DE=2r.$$

В треугольнике ACM

$$\angle A=30°,$$

$$AM=r\operatorname{ctg}30°=r\sqrt{3}.$$

Далее,

$$CO_1=\frac{CE}{\sqrt{3}}=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

В треугольнике ASO

$$\angle A=60°,\qquad AO=h\operatorname{ctg}60°=\frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Но

$$AO=AM+MO=AM+CO_1=r\sqrt{3}+\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Поэтому

$$r\sqrt{3}+\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{h}{\sqrt{3}};$$

отсюда $5r=h$.

Ответ. $\frac{h}{5}$.

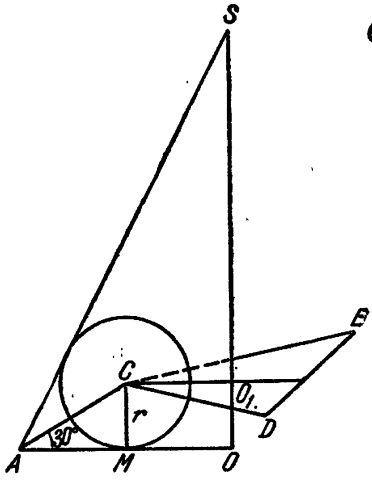

Рис. 154.

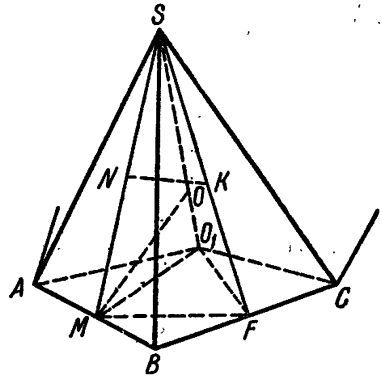

Рис. 155.

582. Пусть O—центр вписанного шара, O_1—основание высоты пирамиды, K и N—точки касания этого шара с двумя соседними боковыми гранями пирамиды (рис. 155). Отрезки $MN=MO_1$ как длины касательных, проведенных к вписанному шару из точки M.

В треугольнике AO_1M

$$MO_1=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

В треугольнике SMO_1

$$SM=\frac{MO_1}{\cos\alpha}=\frac{a}{2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

В треугольнике MBF

$$MF=a\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (2)$$

Далее,

$$SN=SM-MN=SM-MO_1=\frac{a}{2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\cos\alpha}-\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=$$

$$=\frac{a\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{2\cos\alpha}(1-\cos\alpha). \qquad (3)$$

Из подобия треугольников NSK и MSF следует

$$NK=MF\frac{SN}{SM},$$

или, учитывая (1), (2) и (3):

$$NK=a\cos\frac{\pi}{n}(1-\cos\alpha)=2a\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отв. $2a\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

583. По условию $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=90°$ (рис. 156). Точки M, A, B и C можно считать вершинами пирамиды $MABC$.

Пусть

$$MA=x, \qquad MB=y, \qquad MC=z,$$

а искомое расстояние $MO=h$.

Из прямоугольных треугольников AMB, BMC и CMA следует

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=c^2,\\ y^2+z^2&=a^2,\\ x^2+z^2&=b^2,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)},\\ y&=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2-b^2)},\\ z&=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2-c^2)}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть V — объем пирамиды $MABC$, тогда

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h. \qquad (2)$$

Если же принять за основание пирамиды треугольник AMC, то ребро MB будет служить высотой пирамиды, а поэтому

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xzy=\frac{1}{6}xyz. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$h=\frac{xyz}{2S_{\triangle ABC}}, \tag{4}$$

а из (1) и (4) имеем

$$h=\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

где

$$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

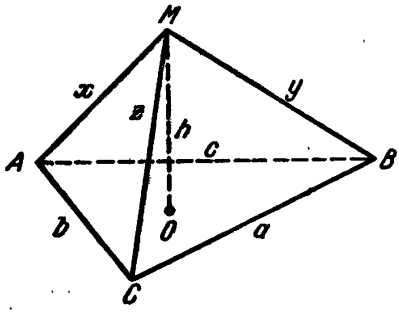

Рис. 156.

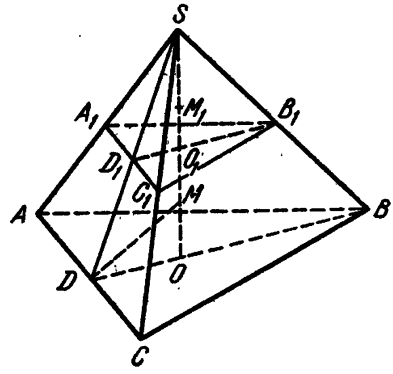

Рис. 157.

584. Пусть S—данный трехгранный угол (рис. 157). Проведя плоскость, отсекающую на ребрах трехгранного угла равные отрезки ($SA=SB=SC$), получим правильный тетраэдр $SABC$. Пусть $MO=R$—радиус шара, вписанного в этот тетраэдр.

Так как DM—биссектриса угла D в треугольнике SDO, то

$$\frac{MO}{SM}=\frac{OD}{SD}.$$

Но $OD=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}SD$, поэтому

$$\frac{MO}{SM}=\frac{1}{3} \text{ или } MO=\frac{1}{4}SO.$$

Таким образом, диаметр вписанного шара равен $\frac{1}{2}SO$. Проведя через середину SO плоскость, параллельную плоскости ABC, получим второй правильный тетраэдр $SA_1B_1C_1$, подобный первому; коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$.

Поэтому, обозначая радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр $SA_1B_1C_1$ буквой r ($O_1M_1=r$), получим $R:r=2$.

Оба шара касаются друг друга в точке O_1, являющейся серединой высоты большего тетраэдра.

Отв. $r:R=1:2$.

585. Пусть диагональ A_1C служит осью цилиндрической поверхности, которая касается ребра AD (рис. 158). Радиус цилиндрической поверхности равен отрезку, перпендикулярному к скрещивающимся прямым A_1C и AD и имеющему концы на этих прямых, так как этот отрезок есть один из радиусов цилиндрической поверхности.

Длина указанного отрезка (так называемое кратчайшее расстояние между A_1C и AD) равна расстоянию от любой точки отрезка AD до плоскости, параллельной AD и проходящей через A_1C, т. е. до плоскости A_1D_1CB.

Проведя AM перпендикулярно к плоскости A_1D_1CB, легко вычислим AM:

$$AM=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Так как плоскость AA_1B_1B перпендикулярна к плоскости A_1D_1CB, то AM принадлежит плоскости AA_1B_1B. Таким образом, AM является радиусом цилиндрической поверхности.

Отв. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

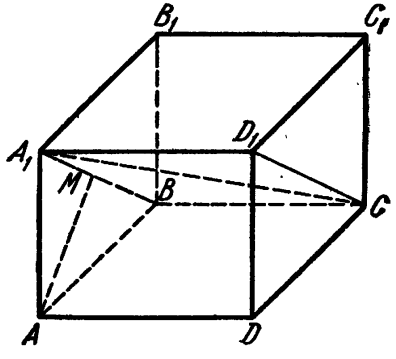

Рис. 158.

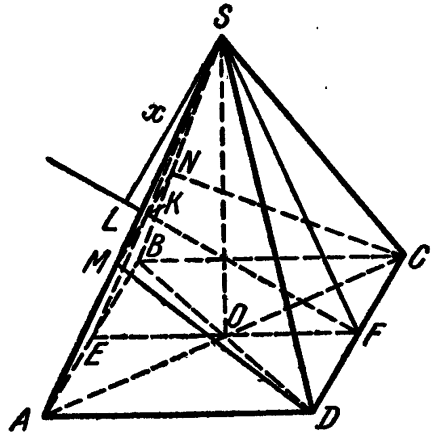

Рис. 159.

586. Так как FK — медиана треугольника SEF (рис. 159), то

$$S_{\Delta ESF}=2S_{\Delta SKF}. \qquad (1)$$

В треугольнике SOF

$$SF^2=\frac{a^2}{4}+h^2, \quad SE=SF.$$

В треугольнике ESF медиана

$$FK=\frac{1}{2}\sqrt{2SF^2+2EF^2-SE^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2+2a^2}=\frac{1}{4}\sqrt{9a^2+4h^2}\,.$$

Обозначим искомое расстояние SL через x, тогда

$$S_{\Delta ESF}=\frac{1}{2}ah,\quad S_{\Delta SKF}=\frac{1}{2}KFx=\frac{x}{8}\sqrt{9a^2+4h^2}.$$

Учитывая равенство (1), получим

$$\frac{1}{2}ah=\frac{x}{4}\sqrt{9a^2+4h^2},$$

откуда легко определить x.

Отв. $\dfrac{2ah}{\sqrt{9a^2+4h^2}}$.

587. Угол $AMC=\varphi$ — линейный угол двугранного угла (рис. 160). Пусть $\angle SCD=\alpha$. В треугольнике CMB ($\angle M=90°$)

$$\sin\alpha=\frac{CM}{a}=\frac{CM}{2CD}=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

так как $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{CD}{CM}$ (см. треугольник DMC).

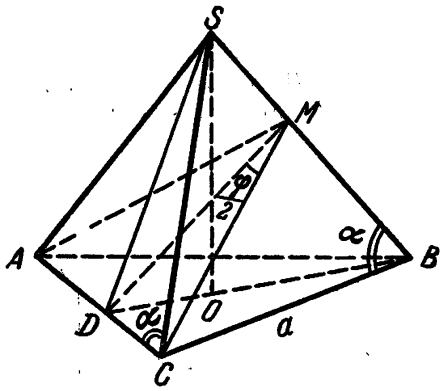

Рис. 160.

Так как $SD=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$ (из $\triangle SDC$), то

$$S_{бок}=\frac{1}{2}\,3a\,\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a^2}{4}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{3a^2}{4}\,\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}}=\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1}}.$$

Отв. $S_{бок}=\dfrac{3a^2}{4\sqrt{4\sin\frac{2\varphi}{2}-1}}$.

588. Пусть AB — штатив (рис. 161). Проводим прямую BD через точку B и вершину конуса C. Через BD проводим плоскости P и Q, касательные к данному конусу. В плоскости ABD проводим CL параллельно DA. Приступим к вычислению площади тени конуса S_{DMKN}.

В треугольнике BCL

$$CL=BL=2,\quad \angle BCL=45°.$$

Так как в треугольнике OCD $\angle D=45°$, то $OD=OC=2$. Так как в треугольнике ODN $\angle N=90°$ и $OD=2ON$, то $\angle ODN=30°$. Отсюда

$$\angle MON=120°, \quad MN=ON\sqrt{3}=\sqrt{3}\ (м),$$

$$S_{DMKN}=S_{OMDN}-S_{\text{сектора } OMKN}=$$

$$=\frac{OD\cdot MN}{2}-\frac{\pi ON^2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi\cdot 1}{3}=\left[\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right]\ (м^2).$$

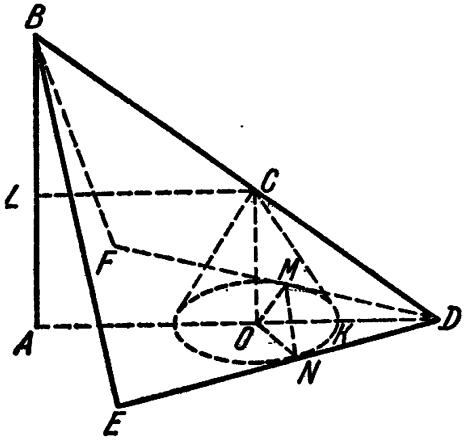

Рис. 161.

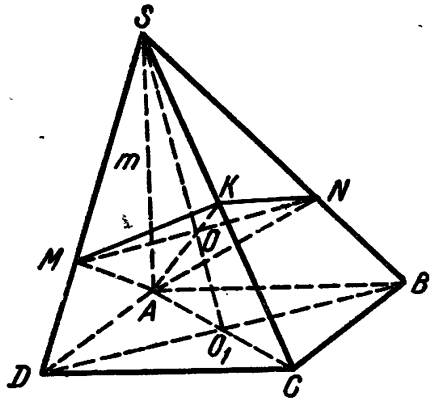

Рис. 162.

589. Пусть P—секущая плоскость, $P\|BD$ (точки A и K принадлежат P) (рис. 162), SO_1—линия пересечения плоскостей DSB и ASC, MN—линия пересечения плоскостей P и DSB, $AMKN$—сечение пирамиды плоскостью P. Имеем

$$S_{AMKN}=\frac{1}{2}MN\cdot AK, \tag{1}$$

поскольку $MN\perp AK$.

Так как $\triangle MSN\sim\triangle DSB$, то $\frac{MN}{DB}=\frac{SO}{SO_1}$. Но SO_1—медиана треугольника ASC и, следовательно, $\frac{SO}{SO_1}=\frac{2}{3}$, а значит, $\frac{MN}{DB}=\frac{2}{3}$, т. е.

$$MN=\frac{2}{3}b. \tag{2}$$

Так как AK—медиана гипотенузы треугольника ASC, то

$$AK=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+m^2}. \tag{3}$$

Из равенств (1), (2) и (3) следует

$$S_{AMKN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}b\frac{1}{2}\sqrt{a^2+m^2}.$$

Ответ. $S_{AMKN}=\frac{b}{6}\sqrt{a^2+m^2}$.

590. Пусть $\angle ASC=\alpha$, $DE=l$. Обозначим $\angle SBO=\beta$ (рис. 163). Из треугольника SOB имеем

$$\cos\beta=\frac{OB}{SB}=\frac{2AD}{\sqrt{3}SB}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{AD}{SA}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Так как $BD=\dfrac{l}{\sin\beta}$ (из $\triangle BDE$) и $BD=\dfrac{AC}{2}\sqrt{3}$ (из $\triangle ABC$), то

$$AC=\frac{2}{3}\frac{l}{\sin\beta}\sqrt{3}.$$

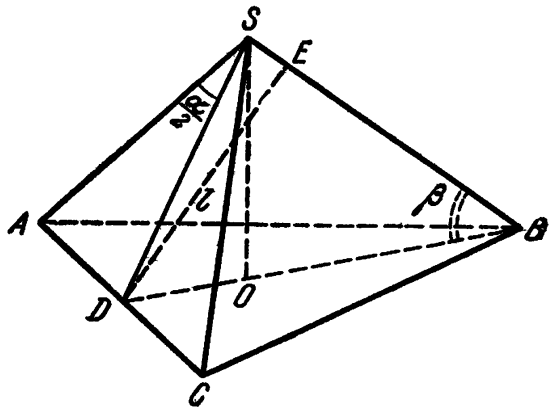

Рис. 163.

Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{l^2}{\sqrt{3}\sin^2\beta}.$$

Так как $BO=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{2l}{3\sin\beta}$, то в треугольнике SOB

$$SO=OB\operatorname{tg}\beta=\frac{2l}{3\cos\beta}.$$

Объем

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\,SO=\frac{1}{3}\frac{l^2}{\sqrt{3}\sin^2\beta}\frac{2l}{3\cos\beta}=\frac{2l^3}{9\sin^2\beta\cos\beta\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Учитывая равенство (1), получаем

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3\sin\frac{\alpha}{2}}\left(3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin 3\frac{\alpha}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует, что

$$V=\frac{2l^3\,3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{9\sqrt{3}\sin\frac{3\alpha}{2}\,2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{3}l^3\operatorname{cosec}\frac{3\alpha}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}l^3\operatorname{cosec}\frac{3\alpha}{2}$.

591. Если $0°<\alpha<60°$, то возможен только один вид параллелепипеда, удовлетворяющий условию задачи; две противоположные вершины его — вершины трехгранных углов, каждый из плоских углов которых равен α.

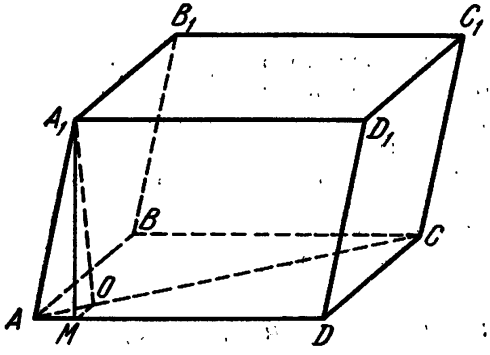

Рис. 164.

Найдем объем параллелепипеда этого вида (рис. 164). Проводим A_1O перпендикулярно к плоскости $ABCD$. Все плоские углы трехгранного угла A — острые. Так как по условию $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\alpha$, то AO — биссектриса $\angle BAD$, т. е. $\angle CAD=\frac{\alpha}{2}$.

Проводим $OM\perp AD$ и строим отрезок A_1M. По теореме о трех перпендикулярах отрезок AM также перпендикулярен к AD, т. е. $\triangle AA_1M$ и $\triangle AOM$ — прямоугольные.

Из прямоугольного треугольника AA_1M находим, что

$$AM=a\cos\alpha,$$

а из прямоугольного треугольника AOM имеем

$$AO=\frac{AM}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Обозначим A_1O через H. Из прямоугольного треугольника AA_1O следует

$$H^2=a^2-\frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}-\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)=\frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$H=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Площадь основания параллелепипеда равна

$$S_{ABCD}=a^2\sin\alpha.$$

Теперь у нас достаточно данных для нахождения объема параллелепипеда

$$V=S_{ABCD}\,H=a^2\sin\alpha\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$V=2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Если же $60°<\alpha<90°$, то, кроме указанного параллелепипеда, возможен еще один вид; две противоположные вершины его — вершины трехгранных углов, каждый из плоских углов которых $(180°-\alpha)$. В этом случае сумма всех трех тупых плоских углов меньше 360°. Проведя решение приемом, аналогичным рассмотренному, найдем

$$V_1'=2a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

592. Пусть $SM=SB=l$, $OB=R$, $SM\perp SB$ (рис. 165), тогда $\smile MDB$ содержит 120°, а $BM=R\sqrt{3}$. Так как $\angle MSB=90°$, то из треугольника MSB имеем

$$2l^2=3R^2. \qquad (1)$$

Из треугольника SOB имеем

$$l^2=R^2+h^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$R^2=2h^2. \qquad (3)$$

Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ или, учитывая (3),

$$V=\frac{2}{3}\pi h^3.$$

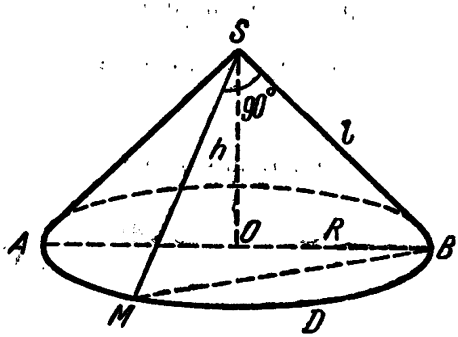

Рис. 165.

593. Пусть $MNO=\alpha$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды $MABC\ldots$, $MO=H$ — высота пирамиды (рис. 166).

Из треугольника MON следует

$$ON=H\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (1)$$

Так как по условию все внутренние двугранные углы равны, то точка O одинаково удалена от всех сторон основания пирамиды, т. е. является центром окружности, вписанной в основание пирамиды. Обозначим ее радиус через r.

Так как $r \cdot p = S$, то $r = \frac{S}{p}$. Из равенства (1) следует

$$H = \frac{ON}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Но так как $ON = r = \frac{S}{p}$, то

$$H = \frac{S}{p} \operatorname{tg} \alpha.$$

Найдем объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} S \frac{S}{p} \operatorname{tg} \alpha = \frac{S^2 \operatorname{tg} \alpha}{3p}.$$

Так как $S_{\text{бок}} = \frac{S}{\cos \alpha}$, то

$$S_{\text{полн}} = S + \frac{S}{\cos \alpha} = \frac{2S \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Отв. $V = \frac{S^2 \operatorname{tg} \alpha}{3p}$, $S_{\text{полн}} = \frac{2S \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

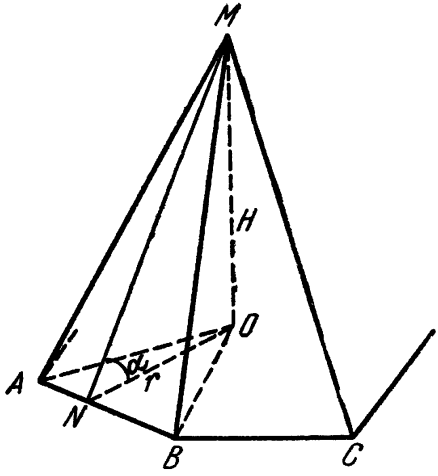

Рис. 166.

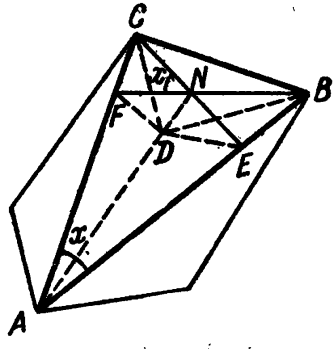

Рис. 167.

594. Пусть AD — ребро прямого двугранного угла (рис. 167), ABC — данная плоскость.

Пусть $CD \perp AD$ и $BD \perp AD$. Проведя $DE \perp AB$ и $DF \perp AC$, убеждаемся (по теореме о трех перпендикулярах), что $CE \perp AB$ и $BF \perp AC$. Поэтому $\angle CED = \angle BFD = \alpha$.

Обозначим искомый $\angle BAC$ через x.

Пусть $DN = a$.

Так как плоскость CDE перпендикулярна к плоскости ABC и плоскость BDF перпендикулярна к плоскости ABC, то DN перпендикулярна к плоскости ABC (DN — линия пересечения плоскостей CDE и BDF).

Из треугольника NDF имеем $FN=a\operatorname{ctg}\alpha$, а из треугольника CND имеем $NC=a\operatorname{tg}\alpha$. Углы CNF и BAC равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, т. е. $\angle CNF=x$.

Из треугольника CNF имеем

$$\cos x=\frac{NF}{NC}=\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{a\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Отв. $\arccos(\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

595. Пусть $\angle BSC=\alpha$, $\angle ASB=\beta$, $\angle ASC=\gamma$. Строим $BA\perp SB$ и $BC\perp SB$. Итак, $\angle ABC=x$ — линейный угол двугранного угла SB (рис. 168).

Пусть $SB=a$. В треугольнике ASB

$$SA=a\sec\beta,\quad AB=a\operatorname{tg}\beta.$$

В треугольнике CSB

$$SC=a\sec\alpha,\quad BC=a\operatorname{tg}\alpha.$$

Из треугольника ASC следует (по теореме косинусов)

$$AC^2=a^2\sec^2\alpha+a^2\sec^2\beta-2a^2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma$$

и из треугольника ABC

$$AC^2=a^2\operatorname{tg}^2\alpha+a^2\operatorname{tg}^2\beta-2a^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cdot\cos x.$$

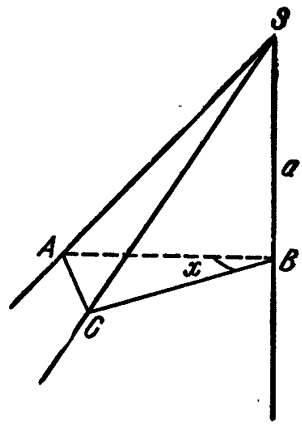

Рис. 168.

Поэтому

$$a^2\sec^2\alpha+a^2\sec^2\beta-2a^2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma=a^2\operatorname{tg}^2\alpha+a^2\operatorname{tg}^2\beta-2a^2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x.$$

Следовательно,

$$\cos x=\frac{2\sec\alpha\sec\beta\cdot\cos\gamma-2}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

или

$$\cos x=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

По аналогии получим

$$\cos y=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

где y — линейный угол двугранного угла SA;

$$\cos z=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

где z — линейный угол двугранного угла SC.

596. Пусть $\angle DSC=x$ — искомый угол (рис. 169), O — центр вписанного в пирамиду шара и центр шара, описанного около нее, SM — высота пирамиды, SK — ее апофема.

Пусть $KC=MK=a$, $OS=OC=R$, $OM=OE=r$ (R — радиус описанного шара, r — радиус вписанного шара).

Треугольники SOE и COM равны, так как они имеют равные гипотенузы ($OS=OC$) и равные катеты ($OE=OM$). Следовательно,

$$SE=MC=a\sqrt{2}. \tag{1}$$

Так как $\triangle OEK=\triangle OMK$, то

$$EK=MK=a. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$SK=SE+EK=a\sqrt{2}+a=a(\sqrt{2}+1).$$

В прямоугольном треугольнике SKC угол $S=\frac{x}{2}$.

Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{KC}{SK}=\frac{a}{a(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}-1,$$

откуда

$$\frac{x}{2}=22°30'.$$

Отв. 45°.

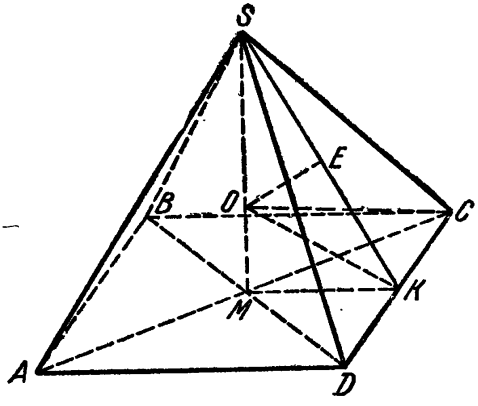

Рис. 169.

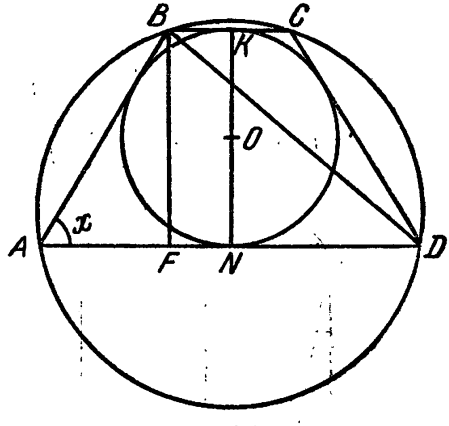

Рис. 170.

597. На рис. 170 изображены осевые сечения усеченного конуса и обоих шаров.

Пусть $\angle BAD=x$. Проводим $BF\perp AD$. Имеем

$$BF=KN=2R,$$

$$FD=\frac{AD+BC}{2}=\frac{AB+CD}{2}=AB.$$

Но $AB=\frac{2R}{\sin x}$ (из $\triangle ABF$), поэтому $FD=\frac{2R}{\sin x}$. Теперь из треугольника BFD легко найти

$$BD=\sqrt{4R^2+\frac{4R^2}{\sin^2 x}}=\frac{2R}{\sin x}\sqrt{1+\sin^2 x}.$$

Но $BD=2R\sqrt{30}\sin x$, поэтому

$$\frac{2R}{\sin x}\sqrt{1+\sin^2 x}=2R\sqrt{30}\sin x,$$

$$1+\sin^2 x=30\sin^4 x,$$

$$30\sin^4 x-\sin^2 x-1=0,$$

$$\sin^2 x=0{,}2.$$

Следовательно,

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x=0{,}6.$$

Ответ. $\frac{1}{2}\arccos 0{,}6$.

598. Сечение $ABDE$ — квадрат (рис. 171). BC — отрезок, соединяющий точки верхнего и нижнего оснований $AO \parallel O_1B$, поэтому $\angle AOC=\alpha$.

Пусть $\angle ABC=x$, $OA=R$, тогда $AB=2R$. Из треугольника AOC следует, что $AC=2R\sin\frac{\alpha}{2}$, а из треугольника ABC

$$\operatorname{tg} x=\frac{AC}{AB}=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{2R}=\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ. $x=\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

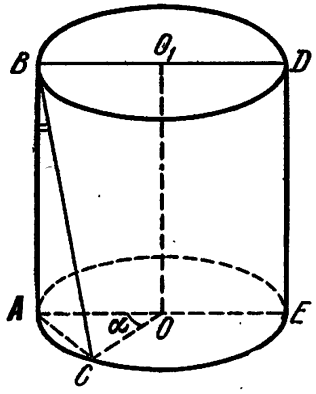

Рис. 171.

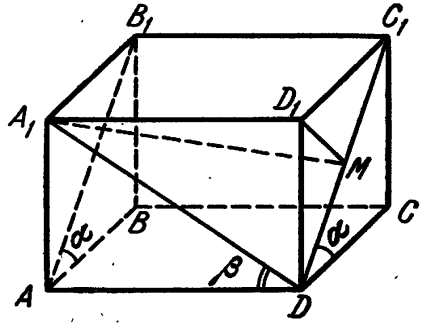

Рис. 172.

599. Пусть AB_1 и A_1D — непересекающиеся диагонали двух смежных граней параллелепипеда, $\angle B_1AB=\alpha$, $\angle A_1DA=\beta$ (рис. 172).

Проводим DC_1 — диагональ грани DD_1C_1C. Так как $DC_1 \parallel AB_1$, то угол между A_1D и AB_1 равен углу A_1DC_1, который мы обозначим через x.

Проводим $D_1M \perp DC_1$ в грани DD_1C_1C (точка M принадлежит C_1D). Легко убедиться, что $A_1M \perp DC_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Обозначим A_1D через l. Тогда из прямоугольного треугольника A_1DM имеем

$$DM = l\cos x. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике A_1D_1D угол $A_1 = \beta$, следовательно,

$$DD_1 = l\sin\beta. \qquad (2)$$

В прямоугольном треугольнике DD_1M угол $D_1 = \alpha$, следовательно, $DM = DD_1\sin\alpha$, или, учитывая (2),

$$DM = l\sin\alpha\sin\beta. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует, что $l\cos x = l\sin\alpha\sin\beta$, откуда

$$\cos x = \sin\alpha\sin\beta.$$

Отв. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

600. Пусть O и O_1 — центры оснований двух соседних конусов, лежащих на плоскости P, M — середина отрезка OO_1, SA и SB — проекции высот SO и SO_1 этих конусов на плоскости P (рис. 173).

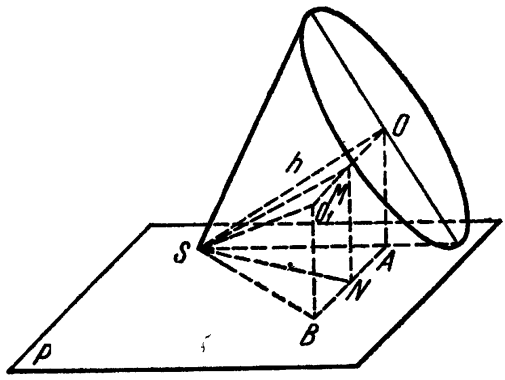

Рис. 173.

Пусть $SO = SO_1 = h$, x — искомый угол. В треугольнике AOS катет $SA = h\cos\frac{x}{2}$. В треугольнике SAN катет

$$AN = SA\sin\frac{\pi}{n} = h\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Из треугольника SMO имеем

$$SM = h\cos\frac{x}{2},$$

$$OM = AN = h\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{n}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{OM}{SM} = \frac{h\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{n}}{h\cos\frac{x}{2}},$$

или $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{n}$.

Отв. $2\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

601. Пусть $SABC$ — данный тетраэдр (рис. 174) и $SA=a$, $BC=b$, $\angle(SA, BC)=\varphi$, c — кратчайшее расстояние между SA и BC.

Достроим тетраэдр до параллелепипеда $CBMNADES$ (как показано на рисунке). Тогда $CN=a$, $\angle BCN=\varphi$, c — расстояние между параллельными гранями $CBMN$ и $ADES$, т. е. высота параллелепипеда.

Пусть V_1 — объем этого параллелепипеда. Имеем

$$V_1=abc\sin\varphi,$$

так как площадь параллелограмма $CBMN=ab\sin\varphi$.

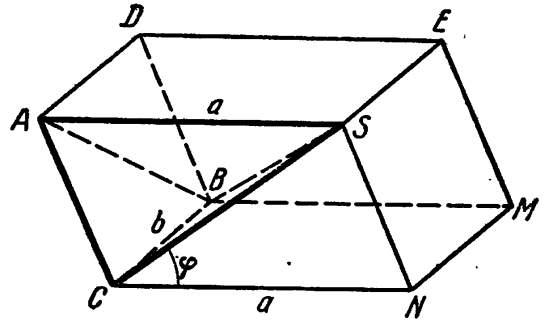

Рис. 174.

Если считать основанием тетраэдра $SABC$ треугольник ABC, а основанием параллелепипеда — параллелограмм $CADB$, то тетраэдр и параллелепипед будут иметь одинаковые высоты. Так как площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $CADB$, то, обозначая через h общую высоту тетраэдра и параллелепипеда, получим

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\,h=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,S_{CADB}h=\frac{1}{6}V_1=\frac{1}{6}abc\sin\alpha.$$

Ответ. $\dfrac{abc\sin\alpha}{6}$.

602. Пусть $EF=a$, $KL=b$, c — кратчайшее расстояние между EF и KL, α — угол между EF и KL (рис. 175).

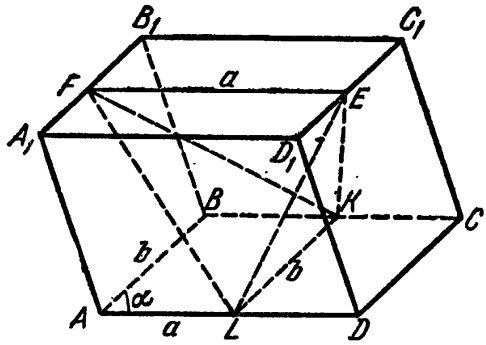

Рис. 175.

Согласно задаче 601

$$V_{EFKL}=\frac{1}{6}abc\sin\alpha.$$

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площадь основания $ABCD$ равна $ab\sin\alpha$, а высота, опущенная на это основание, равна c. Поэтому объем этого параллелепипеда

$$V=abc\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{EFKL}}{V}=\frac{1}{6}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{6}$.

603. Сечения ABC и $A_1B_1C_1$ представляют равносторонние треугольники, плоскости их параллельны, так как $AB\parallel A_1B_1$, $AC\parallel A_1C_1$. Если провести плоскость, параллельную этим сечениям, посередине между ними, то в сечении получится шестиугольник $DEFGHK$. Стороны его равны, так как каждая из них равна

половине диагонали грани куба, например, $DE=\frac{1}{2}CB$ как средняя линия $\triangle A_1BC$ (D есть середина A_1C, а E—середина A_1B). Но и углы этого шестиугольника все одинаковы, по 120°, так как стороны их параллельны сторонам равностороннего треугольника ABC. Таким образом, шестиугольник $DEFGHK$—правильный (рис. 176).

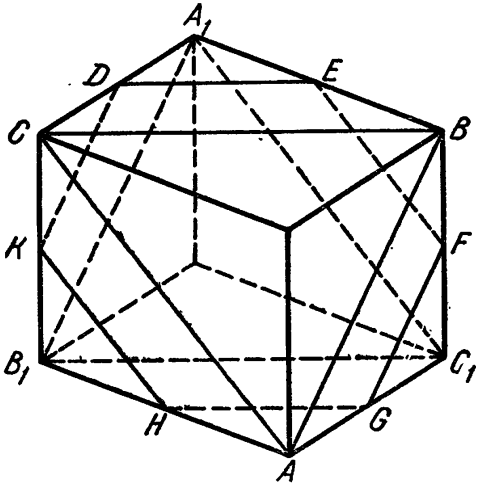

Рис. 176.

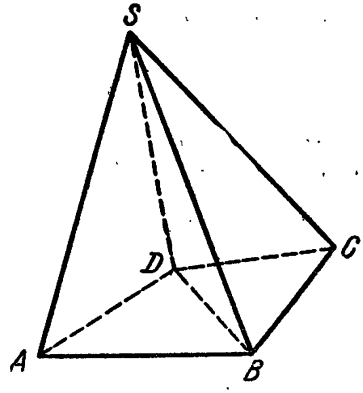

Рис. 177.

604. Пусть в четырехгранном углу $SABCD$ наибольший плоский угол есть ASB (рис. 177). Проведем плоскость через прямые SD и SB. Так как любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других, то можем записать

$$\angle ASB < \angle ASD + \angle DSB,$$
$$\angle DSB < \angle DSC + \angle BSC.$$

Отсюда получаем

$$\angle ASB < \angle ASD + \angle DSC + \angle BSC.$$

605. Допустим, что такой многогранник существует и имеет m граней. Пусть грани имеют число сторон n_1, n_2, n_3, ..., n_m. Подсчитаем число ребер этого многогранника. Очевидно, число всех сторон всех граней в два раза больше числа ребер многогранника, так как одно и то же ребро является общей стороной двух смежных граней. Поэтому число ребер многогранника

$$l=\frac{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_m}{2}.$$

Но каждое из чисел n_1, n_2, ..., n_m—нечетное и число их m тоже нечетное, поэтому и сумма, стоящая в числителе, тоже нечетная и не разделится без остатка на два. Итак, такого многогранника не существует.

606. Пусть ADE (рис. 178) — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре AD пирамиды $ABCD$. Если принять за основания пирамид $ABDE$ и $ACDE$ соответственно грани ABD и ACD, то обе пирамиды будут иметь равные высоты, поскольку точка E биссекторной плоскости равноудалена от плоскостей ABD и ACD. Таким образом,

$$\frac{\text{объем } ABDE}{\text{объем } ACDE} = \frac{\text{площадь } ABD}{\text{площадь } ACD}. \quad (1)$$

Если же за общее основание тех же пирамид принять грань ADE, то ясно, что их высоты будут относиться, как EB к EC, следовательно,

$$\frac{\text{объем } ABDE}{\text{объем } ACDE} = \frac{EB}{EC}. \quad (2)$$

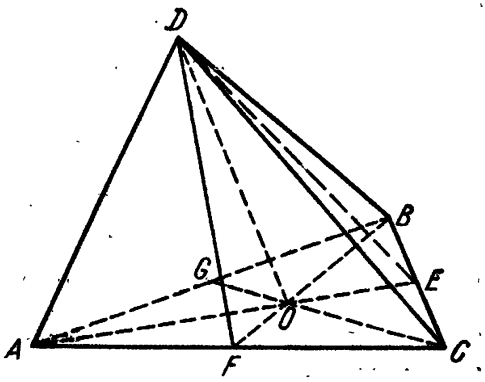

Рис. 178.

Из (1) и (2) следует доказываемое, а именно:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{\text{площадь } ABD}{\text{площадь } ACD}.$$

607. Пусть прямая имеет три точки A, B, C, общие с цилиндрической поверхностью. Спроектируем цилиндрическую поверхность на плоскость, перпендикулярную к образующим. Эта поверхность спроектируется в виде окружности. Прямая, если она не параллельна образующей, спроектируется на эту плоскость в виде прямой, которая будет иметь с этой окружностью три (разные) общие точки, что невозможно. Прямая эта должна быть, следовательно, параллельна образующей (тогда она спроектируется в одну точку), но, имея общую точку с поверхностью, т. е. с одной из ее образующих, она должна совпадать с этой образующей.

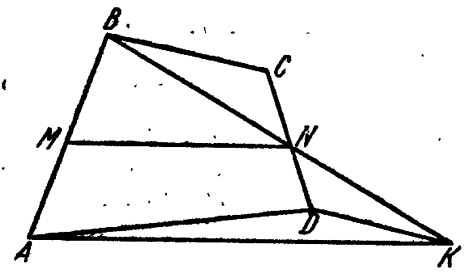

Рис. 179.

Вторую часть задачи (для конической поверхности) докажите сами.

608. Соединим точки B и C, A и D отрезками прямых (рис. 179). Через точку A проведем прямую параллельно MN до встречи в точке K с прямой, проходящей через B и N. Заметим, что $AK=2MN$, так как MN — средняя линия в треугольнике ABK. Далее,

$$\triangle BNC = \triangle KND,$$

ибо $BN=NK$, $CN=ND$ и $\angle BNC = \angle KND$. Поэтому $DK=BC$. Из треугольника ADK следует

$$DK + AD > AK = 2MN$$

(здесь существенно, что точка D не лежит на прямой AK, иначе пришлось бы поставить знак $\geqslant$). Итак,

$$BC+AD>2MN,$$

что и требовалось доказать.

609. Пусть DE и KF—два отрезка, каждый из которых соединяет середины скрещивающихся ребер (рис. 180). Соединим отрезками точки D и F, F и E, E и K, K и D. Тогда $FE \parallel AB$ и $FE=\frac{1}{2}AB$ как средняя линия треугольника ASB. $DK \parallel AB$ и $DK=\frac{1}{2}AB$ как средняя линия треугольника ACB. Следовательно, $FE \# DK$. Поэтому $DFEK$—параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O и делятся в этой точке пополам.

Аналогично доказывается, что отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер AB и SC, пройдет через середину отрезка DE, т. е. через точку O.

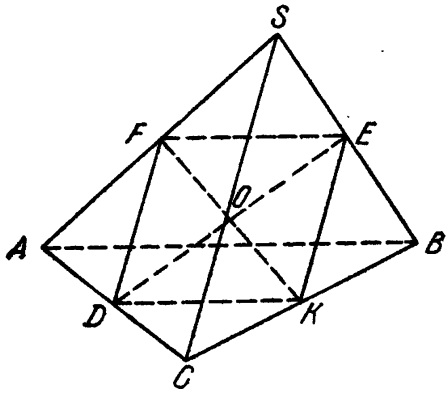

Рис. 180.

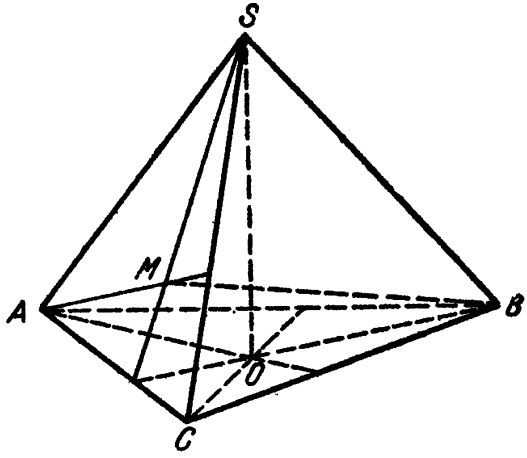

Рис. 181.

610. Пусть высота SO проходит через точку O— ортоцентр треугольника ABC (рис. 181).

Пусть BM—другая высота пирамиды, т. е. $BM \perp$ пл. ASC, AM—проекция AB на пл. ASC. Так как $AB \perp SC$ (по теореме о трех перпендикулярах, так как $OC \perp AB$), то и $AM \perp SC$ (по обратной теореме о трех перпендикулярах).

Аналогично доказывается, что $SM \perp AC$ (так как $OB \perp AC$, то $SB \perp AC$, а следовательно, и $SM \perp AC$).

Таким образом, точка M—ортоцентр треугольника ASC.

Так же доказывается, что высоты пирамиды, проведенные из вершин A и C, пройдут через ортоцентры противоположных граней.

611. Пусть O_1—центр тяжести грани ASC, BO_1—один из рассматриваемых в задаче отрезков. Возьмем еще какую-нибудь грань, например BSC; обозначим ее центр тяжести через O_2 и докажем, что отрезок AO_2 пересекает отрезок BO_1 и при этом точка пересечения отрезков O делит отрезок BO_1 в отношении 1:3, считая от точки O_1.

В самом деле, если M_1 и M_2 — середины отрезков AC и AB (рис. 182), то очевидно, что $AB \parallel M_1M_2$; легко также видеть, что $O_1O_2 \parallel M_1M_2$, так как точки O_1 и O_2 делят соответственно отрезки M_1S и M_2S в одном и том же отношении. Поэтому $AB \parallel O_1O_2$, фигура ABO_2O_1 — трапеция и, стало быть, ее диагонали BO_1 и AO_2 пересекаются. Обозначим точку пересечения диагоналей через O. Имеем

$$\frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{2}, \quad \frac{O_1O_2}{M_1M_2}=\frac{2}{3}.$$

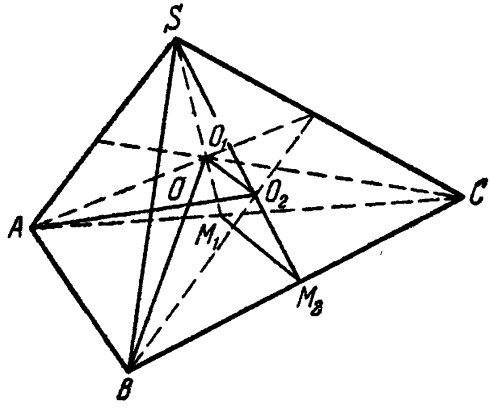

Рис. 182.

Перемножив эти равенства, получим $\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{1}{3}$. Но из подобия треугольников AOB и O_1OO_2 следует

$$\frac{O_1O}{OB}=\frac{O_1O_2}{AB}.$$

Таким образом, $\frac{O_1O}{OB}=\frac{1}{3}$, что и утверждалось. Если мы теперь возьмем центр тяжести еще на одной грани и построим соответствующий отрезок, то он в силу доказанного также пересечет отрезок BO_1 и притом в точке, которая разделит BO_1 в отношении 1:3, т. е. в точке O. Следовательно, все рассматриваемые отрезки пересекаются в точке O. Очевидно также, что точка O делит любой из них в отношении 1:3, что и требовалось доказать.

612. Пусть заданы прямые a, b и c. Проведем через каждую из них по две плоскости, параллельные двум другим; получатся три пары параллельных плоскостей. Тело, замкнутое этими шестью плоскостями, и будет искомый параллелепипед.

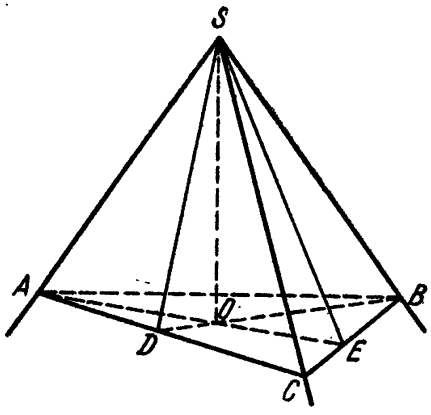

Рис. 183.

613. Пусть $SABC$ — данный трехгранный угол (рис. 183).

Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла SA, служит биссекторная плоскость этого двугранного угла — плоскость ASE.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от граней двугранного угла SB, служит биссекторная плоскость этого двугранного угла — плоскость BSD.

Обе биссекторные плоскости пересекаются по прямой SO; следовательно, луч SO — искомое геометрическое место точек. Заметим, что и третья биссекторная плоскость проходит через этот луч.

614. Пусть Q — одна из множества плоскостей, проходящих через прямую BC (рис. 184).

Проведем через точку A плоскость $P \perp BC$; DE — линия пересечения P и Q.

Проведя $AM \perp Q$ (точка M принадлежит Q), убедимся, что точка M принадлежит P и точка M принадлежит DE, причем $AM \perp DE$ (D — точка пересечения BC и P).

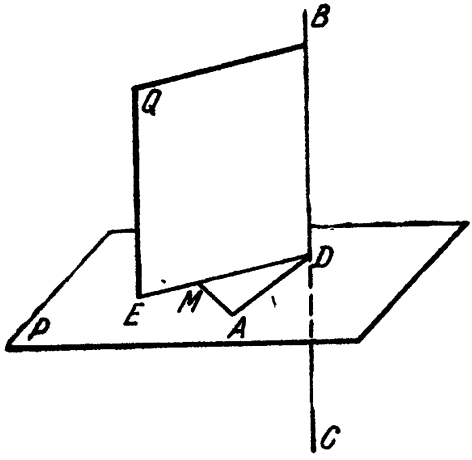

Рис. 184.

Отрезок AD виден из точки M под прямым углом. Точка M принадлежит искомому геометрическому месту точек. Следовательно, каждая из точек искомого геометрического места точек лежит на окружности, построенной на отрезке AD, как на диаметре.

Если же взять произвольную точку этой окружности, то всегда можно найти плоскость, проходящую через эту точку и прямую BC. Пусть M — эта точка, а Q — единственная плоскость, проходящая через M и BC. Соединив точку M отрезками с концами диаметра AD, получим $\angle AMD = 90°$; при этом $MA \perp Q$.

Следовательно, искомым геометрическим местом точек служит окружность, лежащая в плоскости P, построенная на отрезке AD, как на диаметре.

Глава XV

НЕРАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

615. Известно, что среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Поэтому

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

или

$$\frac{3p-(a+b+c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Но так как площадь треугольника

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr,$$

то

$$\frac{3p-2p}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}=\sqrt[3]{\frac{p^2r^2}{p}}=\sqrt[3]{pr^2},$$

или

$$\frac{p}{3}\geqslant\sqrt[3]{pr^2},$$

или

$$\frac{p^3}{27}\geqslant pr^2,$$

откуда

$$p^2\geqslant 27r^2.$$

Знак равенства имеет место лишь при $a=b=c$. Заметим, что геометрический смысл этого неравенства таков: из всех треугольников, описанных вокруг данного круга, равносторонний имеет наименьший периметр.

616. Обозначим радиус круга, вписанного в треугольник ABC через r, тогда сторона правильного треугольника $A_1B_1C_1$, вписанного в этот круг, равна $r\sqrt{3}$, а периметр его равен $3r\sqrt{3}$. Если обозначим периметр треугольника ABC через $2p$, то задача сводится к доказательству неравенства

$$2p\geqslant 6r\sqrt{3},$$

или

$$p\geqslant 3r\sqrt{3},$$

или

$$p^2\geqslant 27r^2.$$

А это неравенство было нами доказано в задаче 615.

Знак равенства имеет место лишь при $AB=BC=AC$.

617. Предварительно докажем, что площадь треугольника не больше $\frac{ab}{2}$, где a и b—две его стороны. Действительно, если принять a за основание треугольника, то b не меньше его высоты h. Следовательно, площадь треугольника

$$\frac{ah}{2}\leqslant\frac{ab}{2}.$$

Очевидно, что сумма площадей четырех треугольников, каждый из которых образован соответственно двумя сторонами и диагональю четырехугольника, представляет удвоенную площадь четырехугольника. Таким образом, удвоенная площадь четырехугольника не больше суммы

$$\frac{ab}{2}+\frac{ad}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{cd}{2}=\frac{a}{2}(b+d)+\frac{c}{2}(b+d)=\frac{(a+c)(b+d)}{2},$$

а площадь четырехугольника не больше $\frac{(a+c)(b+d)}{4}$.

618. Предварительно докажем, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{4}{m+n},\quad \text{если}\quad m>0,\ n>0.$$

Действительно, рассмотрим очевидное неравенство

$$\begin{aligned}(m-n)^2&\geqslant 0,\\ m^2-2mn+n^2&\geqslant 0,\\ m^2+2mn+n^2-4mn&\geqslant 0,\\ (m+n)^2-4mn&\geqslant 0,\\ (m+n)^2&\geqslant 4mn,\\ \frac{m+n}{mn}&\geqslant\frac{4}{m+n},\\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n}&\geqslant\frac{4}{m+n}.\end{aligned}$$

На основании последнего неравенства имеем

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geqslant\frac{4}{(p-b)+(p-c)}=\frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a},\qquad(1)$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geqslant\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c},\qquad(2)$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}\geqslant\frac{4}{(p-a)+(p-c)}=\frac{4}{2p-a-c}=\frac{4}{b}.\qquad(3)$$

Сложив почленно соотношения (1), (2) и (3), получим

$$\frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c}\geqslant\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c},$$

или

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

619. Имеем

$$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{4ab\sin C}{8}\leqslant\frac{(a-b)^2+4ab}{8}=\left(\frac{a+b}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место, когда треугольник прямоугольный и равнобедренный ($a=b$).

620. Имеем

$$S_{ABC}=\frac{ab\sin C}{2}\leqslant\frac{(a-b)^2+ab}{2}=\frac{1}{2}(a^2-ab+b^2),$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место, когда треугольник равнобедренный и прямоугольный ($a=b$).

621. Имеем

$$S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{2ab\sin C}{4}\leqslant\frac{(a-b)^2+2ab}{4}=\frac{a^2+b^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место, когда треугольник прямоугольный и равнобедренный ($a=b$).

622. Требуется доказать, что $S<\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$. В предыдущей задаче мы доказали, что

$$S\leqslant\frac{a^2+b^2}{4},\quad S\leqslant\frac{b^2+c^2}{4},\quad S\leqslant\frac{a^2+c^2}{4}.$$

Ясно, что знак равенства может иметь место только в одном из этих трех соотношений, поэтому

$$3S<\frac{a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

откуда

$$S<\frac{a^2+b^2+c^2}{6}.$$

623. Обозначим площади треугольников MBC, MCA, MAB (рис. 185) соответственно через S_1, S_2, S_3.

Поскольку треугольники ABC и MBC имеют общее основание, то

$$\frac{AA_1}{MA_1}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S_1}.$$

Составим производную пропорцию

$$\frac{AA_1-MA_1}{MA_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1},$$

или

$$\frac{MA}{MA_1}=\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}. \qquad (1)$$

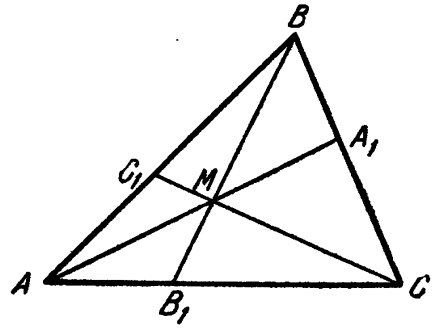

Рис. 185.

Аналогично получим

$$\frac{MB}{MB_1}=\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_1}{S_2} \qquad (2)$$

и

$$\frac{MC}{MC_1}=\frac{S_1}{S_3}+\frac{S_2}{S_3}. \qquad (3)$$

Сложив равенства (1), (2) и (3), получаем

$$\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}=\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+\left(\frac{S_2}{S_3}+\frac{S_3}{S_2}\right)+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)\geqslant 6, \quad (1)$$

так как выражения в скобках суть суммы взаимно обратных положительных чисел и, как известно,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2, \quad \text{если} \quad a>0 \text{ и } b>0.$$

Знак равенства в (1) имеет место тогда, когда $S_1=S_2=S_3$, т. е. когда точка M есть центр тяжести.

624. В предыдущей задаче мы доказали, что

$$\frac{AM}{A_1M}=\frac{S_2+S_3}{S_1}, \quad \frac{BM}{B_1M}=\frac{S_3+S_1}{S_2}, \quad \frac{CM}{C_1M}=\frac{S_1+S_2}{S_3},$$

где S_1, S_2, S_3—площади треугольников MBC, MAC, MAB.

Перемножая эти равенства почленно, получаем

$$\frac{AM}{A_1M}\cdot\frac{BM}{B_1M}\cdot\frac{CM}{C_1M}=\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_1\cdot S_2\cdot S_3}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{S_2S_3}\cdot 2\sqrt{S_3S_1}\cdot 2\sqrt{S_1S_2}}{S_1\cdot S_2\cdot S_3}=8.$$

Знак равенства имеет место, когда M является центром тяжести.

625. Первое решение. Очевидно, что $h_a>2r$; $h_b>2r$; $h_c>2r$.

Умножив обе части этих неравенств на $2R$, получим

$$2Rh_a>4Rr, \quad 2Rh_b>4Rr, \quad 2Rh_c>4Rr. \tag{1}$$

Известно, что

$$\frac{abc}{4S}=R \quad \text{или} \quad \frac{abc}{2ah_a}=R,$$

откуда

$$bc=2Rh_a.$$

Аналогично

$$ac=2Rh_b \quad \text{и} \quad ab=2Rh_c.$$

В силу последних трех равенств неравенства (1) принимают вид

$$bc>4Rr, \quad ac>4Rr, \quad ab>4Rr. \tag{2}$$

Перемножив почленно три неравенства (2), получим

$$\frac{abc}{4R}>2\sqrt{Rr^3}.$$

Но так как $\frac{abc}{4R}=S$, то

$$S>2\sqrt{R\cdot r^3}.$$

Второе решение. Нужно доказать, что

$$S>2\sqrt{R\cdot r^3}. \tag{1}$$

Поскольку $R=\frac{abc}{4S}$ и $r=\frac{2S}{a+b+c}$, то неравенство (1) принимает вид

$$S>2\sqrt{\frac{abc}{4S}\cdot\frac{8S^3}{(a+b+c)^3}},$$
$$(a+b+c)^3>8abc,$$
$$a+b+c>2\sqrt[3]{abc},$$
$$\frac{a+b+c}{3}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}. \qquad (2)$$

Но так как

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc},$$

то неравенство (2) справедливо. Поскольку все произведенные операции обратимы, то из справедливого неравенства (2) следует справедливость и неравенства (1).

626. Требуется доказать (рис. 186), что $AB+BC-AC<2BD$, где D — любая точка на AC. Имеем

$$AB<AD+BD,$$
$$BC<DC+BD.$$

Складывая эти два неравенства почленно, получаем

$$AB+BC<AC+2BD.$$

Вычитая из обеих частей последнего неравенства по AC, находим

$$AB+BC-AC<2BD.$$

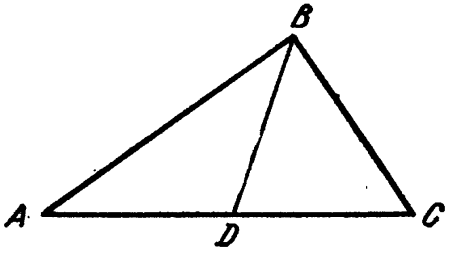

Рис. 186.

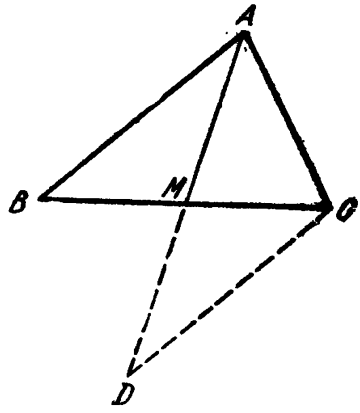

Рис. 187.

627. Требуется доказать (рис. 187), что

$$\frac{1}{2}(AB+AC)-\frac{1}{2}BC<AM<\frac{1}{2}(AB+AC).$$

Имеем (см. задачу 626)

$$AB+AC-BC<2AM,$$

откуда делением обеих частей на 2 получаем

$$\frac{1}{2}(AB+AC)-\frac{1}{2}BC<AM.$$

Итак, мы доказали первое неравенство.

Теперь на продолжении медианы AM отложим отрезок $MD=AM$.

Из треугольника ACD имеем

$$AD<DC+AC,$$

или

$$2AM<AB+AC,$$

откуда, разделив пополам обе части, получаем

$$AM<\frac{1}{2}(AB+AC).$$

628. Обозначим стороны треугольника через a, b, c, а соответственные медианы через m_a, m_b, m_c.

В силу предыдущей задачи имеем

$$\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a<m_a<\frac{1}{2}(b+c),$$

$$\frac{1}{2}(c+a)-\frac{1}{2}b<m_b<\frac{1}{2}(c+a),$$

$$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}c<m_c<\frac{1}{2}(a+b).$$

Складывая эти три неравенства почленно, получаем

$$\frac{1}{2}(a+b+c)<m_a+m_b+m_c<a+b+c.$$

Итак, сумма медиан треугольника заключается между его полупериметром и периметром.

629. Пусть CN—биссектриса внешнего угла BCB_1 треугольника ABC (рис. 188). Отразим точку B относительно биссектрисы CN. Отражение точки B попадет в точку B_1, находящуюся на продолжении стороны AC.

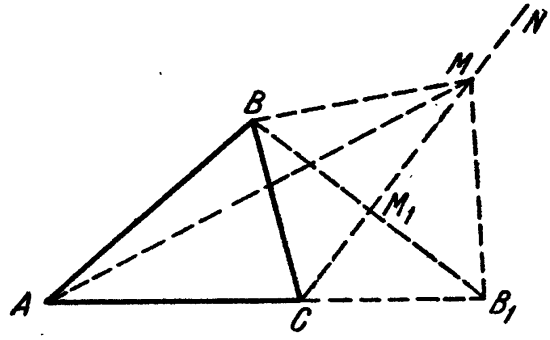

Рис. 188.

Действительно, треугольники BM_1C и B_1M_1C (M_1—точка пересечения CN с BB_1) равны по общему катету CM_1 и прилежащим к нему углам BCM_1 и B_1CM_1, следовательно, $BM_1=B_1M_1$.

Из равенства этих же треугольников следует, что $BC=B_1C$. Отсюда имеем

$$AB_1=AC+BC. \tag{1}$$

Поскольку $CN\perp BB_1$ и CN проходит через середину M_1 отрезка BB_1, то

$$MB=MB_1. \tag{2}$$

Из треугольника AMB_1 следует, что

$$MA+MB_1>AB_1. \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следует

$$MA+MB>AC+BC,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается эта теорема для случая, когда точка M находится на другой биссектрисе.

630. Обозначим катеты треугольника через a и b, а гипотенузу через c.

Площадь треугольника

$$S=\frac{a+b+c}{2}r, \quad \text{или} \quad S=\frac{hc}{2},$$

откуда

$$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Так как $a+b>c$, то

$$\frac{r}{h}<\frac{c}{c+c}=0{,}5. \tag{1}$$

Теперь, сложив почленно очевидное неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$ с равенством $c^2=a^2+b^2$, получим

$$(a^2+b^2)+c^2\geqslant(a+b)^2,$$

или

$$2c^2\geqslant(a+b)^2,$$

откуда

$$a+b\leqslant c\sqrt{2}.$$

Имеем

$$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}\geqslant\frac{c}{c\sqrt{2}+c}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41>0{,}4. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $0{,}4<\frac{r}{h}<0{,}5$.

631. Сложив очевидное неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$ с равенством $a^2+b^2=c^2$, получим

$$2(a^2+b^2)\geqslant c^2+2ab=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2,$$

откуда

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \frac{c^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \frac{c}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \leqslant c,$$

что и требовалось доказать.

632. Пусть в треугольнике ABC (рис. 189) высота $CD=h$, стороны AC и BC — соответственно b и a. Так как

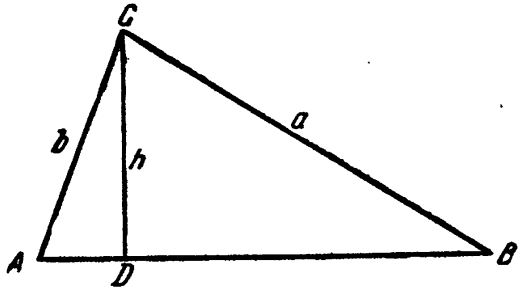

Рис. 189.

$$\frac{1}{a}=\frac{\sin B}{h}, \quad \frac{1}{b}=\frac{\sin A}{h},$$

то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h}(\sin A+\sin B).$$

Но поскольку согласно условию задачи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{h},$$

то

$$\sin A+\sin B=1, \quad \text{или} \quad 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=1.$$

Теперь ясно, что $2\sin\frac{A+B}{2} \geqslant 1$, так как $\cos\frac{A-B}{2} \leqslant 1$.

Так как $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, то $2\cos\frac{C}{2} \geqslant 1$, или $\cos\frac{C}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, откуда

$$\frac{C}{2} \leqslant 60^\circ \quad \text{и} \quad C \leqslant 120^\circ.$$

633. Из равенства $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m}$ следует, что $m=\frac{ab}{a+b}$, или

$$m^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2+2ab}. \tag{1}$$

Из геометрии известно, что

$$m^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}, \tag{2}$$

где c — третья сторона треугольника. Также известно, что

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует

$$m^2=\frac{2a^2+2b^2-a^2-b^2+2ab\cos C}{4}=\frac{a^2+b^2+2ab\cos C}{4}. \tag{4}$$

Из (1) и (4) получаем

$$\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2+2ab} = \frac{a^2+b^2+2ab\cos C}{4},$$

откуда

$$2ab\cos C = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2+2ab} - (a^2+b^2),$$

а

$$\cos C = \frac{2ab}{a^2+b^2+2ab} - \frac{a^2+b^2}{2ab},$$

или

$$\cos C = \frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Так как $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, то

$$\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \leqslant -1.$$

Таким образом, $\cos C \leqslant \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, откуда $C \geqslant 120°$.

634. Через вершины A, B и D проведем окружность. Эта окружность пересечет прямую BC в точке K (рис. 190). Четырехугольник $DABK$ — равнобочная трапеция. Следовательно, $BK = AD$.

Так как сумма углов четырехугольника равна $2d$, то $\angle A + \angle C < 2d$, а поэтому вершина C находится вне круга. Отсюда заключаем, что точка K находится между точками B и C, т. е. $BC > BK = AD$.

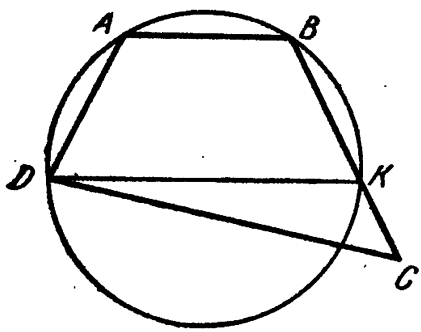

Рис. 190.

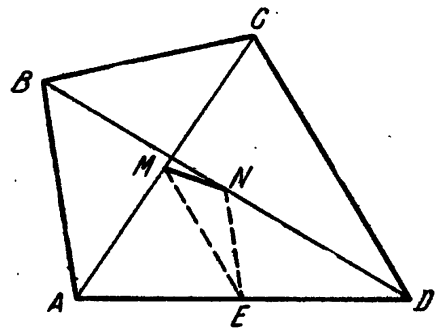

Рис. 191.

635. Пусть точки M и N — середины диагоналей AG и BD четырехугольника $ABCD$ (рис. 191).

Построим треугольник MNE, где E — середина стороны AD. В этом треугольнике

$$NE = \frac{AB}{2}, \qquad ME = \frac{DC}{2}$$

как средние линии треугольников ABD и ACD.

Известно, что сторона треугольника больше модуля разности двух других его сторон, поэтому

$$MN > |NE - ME| = \left|\frac{AB}{2} - \frac{DC}{2}\right| = \frac{|AB - DC|}{2}. \qquad (1)$$

Если же середины обеих диагоналей совпадают с точкой пересечения их, то данный четырехугольник — параллелограмм.

Тогда

$$MN = \frac{1}{2}(AB - CD) = 0. \qquad (2)$$

Объединяя (1) и (2), получим

$$MN \geqslant \frac{|AB - DC|}{2}.$$

636. Обозначим в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC, CD, DA через a, b, c, d (рис. 192). Имеем

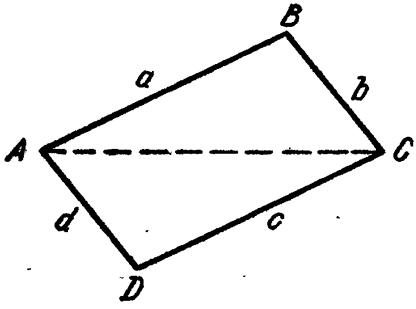

Рис. 192.

$$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta DAC} = \frac{ab \sin B}{2} + \frac{cd \sin D}{2} \leqslant \frac{2ab \sin B}{4} + \frac{2cd \sin D}{4} \leqslant \frac{(a-b)^2 + 2ab}{4} + \frac{(c-d)^2 + 2cd}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место, когда четырехугольник — квадрат.

637. Обозначим диагонали четырехугольника через d_1 и d_2, а угол между ними через α.

Известно, что площадь S четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними.

Имеем

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \alpha}{2} = \frac{2d_1 d_2 \sin \alpha}{4} \leqslant \frac{(d_1 - d_2)^2 + 2d_1 d_2}{4} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства имеет место для четырехугольника, у которого диагонали равны и взаимно перпендикулярны.

638. Пусть сторона ромба a, а угол 2α, где $2\alpha \leqslant 90°$.

Из рис. 193 видим, что

$$\frac{AC}{2} = OC = a \sin \alpha \quad \text{и} \quad AC = 2a \sin \alpha,$$

$$\frac{BD}{2} = OD = a \cos \alpha \quad \text{и} \quad BD = 2a \cos \alpha.$$

Имеем

$$k=\frac{4a}{AC+BD}=\frac{4a}{2a(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sqrt{2}\sin(\alpha+45^\circ)}. \qquad (1)$$

Так как $0<\alpha\leqslant 45^\circ$, то имеет место неравенство

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin(\alpha+45^\circ)\leqslant 1. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) заключаем, что $\sqrt{2}\leqslant k<2$, что и требовалось доказать.

639. Известно, что в любом прямоугольном треугольнике $r=p-c$, где r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр, c — гипотенуза.

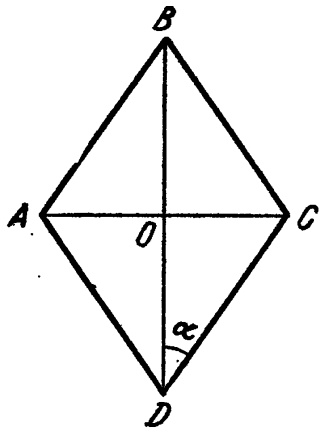

Рис. 193.

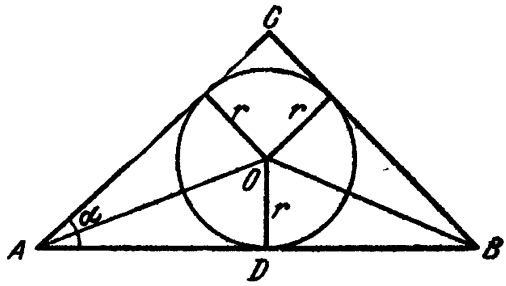

Рис. 194.

Пусть один из острых углов треугольника α (рис. 194); тогда катеты равны $c\sin\alpha$ и $c\cos\alpha$, а периметр

$$2p=c(1+\sin\alpha+\cos\alpha)=c\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2c\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2c\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=c\sqrt{2}\,[\cos 45^\circ+\cos(45^\circ-\alpha)],$$

откуда

$$\frac{c}{p}=\frac{\sqrt{2}}{\cos 45^\circ+\cos(45^\circ-\alpha)}.$$

Итак,

$$\frac{r}{2p}=\frac{p-c}{2p}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{p}\right)=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{\cos 45^\circ+\cos(45^\circ-\alpha)}\right].$$

Отношение $\frac{r}{2p}$ принимает наибольшее значение, когда $\frac{\sqrt{2}}{\cos 45^\circ + \cos(45^\circ - \alpha)}$ принимает наименьшее значение, а последнее может иметь место при наибольшем значении $\cos(45^\circ - \alpha)$, т. е. при $\cos(45^\circ - \alpha) = 1$, или при $45^\circ - \alpha = 0$, откуда $\alpha = 45^\circ$, что и требовалось доказать.

640. Пусть стороны прямоугольника равны $\frac{P}{4} + x$ и $\frac{P}{4} - x$ (периметр равен P), тогда площадь прямоугольника

$$S = \left(\frac{P}{4} + x\right)\left(\frac{P}{4} - x\right) = \frac{P^2}{16} - x^2.$$

Так как x^2 неотрицательно, а следовательно, $-x^2$ неположительно, то площадь S принимает наибольшее значение, когда x равен нулю, т. е. каждая сторона прямоугольника равна $\frac{P}{4}$. Таким образом, искомый прямоугольник — квадрат.

641. Площадь треугольника

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\,\frac{a+b-c}{2}\,\frac{a+c-b}{2}\,\frac{b+c-a}{2}},$$

где a, b, c — стороны треугольника, откуда

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 16S^2. \qquad (1)$$

Сумму $a+b+c$ можно представить так:

$$a+b+c = \frac{3}{4}\left(\frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b-c}{1} + \frac{a+c-b}{1} + \frac{b+c-a}{1}\right). \qquad (2)$$

Запишем равенство (1) так:

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b-c}{1} \cdot \frac{a+c-b}{1} \cdot \frac{b+c-a}{1} = \frac{16S^2}{3}. \qquad (3)$$

Из (3) видим, что произведение сомножителей, которые в (2) являются слагаемыми, — постоянная величина. Следовательно, и сумма принимает наименьшее значение тогда, когда эти сомножители равны между собой, т. е.

$$\frac{a+b+c}{3} = a+b-c = a+c-b = b+c-a.$$

Но это возможно только при $a = b = c$.

Итак, искомый треугольник равносторонний.

642. Площадь треугольника равна

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника.

По условию $\sqrt{p}$ — постоянная величина. Следовательно, наибольшая площадь треугольника будет тогда, когда произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$ примет наибольшее значение.

Так как сумма $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$ — постоянная величина, то произведение $(p-a)(p-b)(p-c)$ будет наибольшим, когда $p-a=p-b=p-c$, т. е. при $a=b=c$.

643. На отрезке AC — основании искомого треугольника — строим сегмент, вмещающий данный угол ABC (рис. 195). Из середины D основания AC проводим перпендикуляр к AC до пересечения с дугой ABC в точке B. Равнобедренный треугольник ABC — искомый.

Действительно, пусть AB_1C — треугольник с вершиной в произвольной точке B_1 на дуге AC. Сравним площади треугольников ABC и AB_1C. Эти треугольники имеют общее основание AC, а высота BD треугольника ABC больше высоты B_1D_1 треугольника AB_1C, поэтому площадь треугольника ABC больше площади треугольника AB_1C.

Итак, искомый треугольник — равнобедренный.

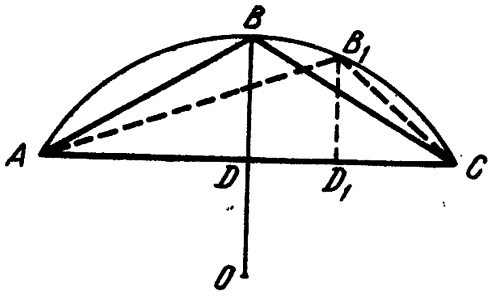

Рис. 195.

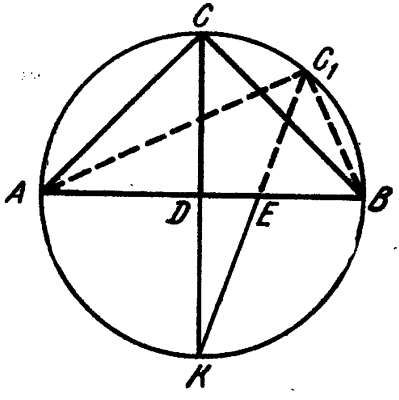

Рис. 196.

644. На отрезке AB — основании искомого треугольника (рис. 196) — строим сегмент, вмещающий данный угол. Рассмотрим два треугольника ACB — равнобедренный и AC_1B — произвольный, где C и C_1 — точки на дуге AB. Биссектрисы CD и C_1E этих треугольников продолжим до встречи с окружностью в точке K. Диаметр CK больше хорды C_1K, т. е.

$$CD+DK>C_1E+EK,$$

но DK меньше EK, так как DK — перпендикуляр к AB, а EK — наклонная. Следовательно, CD больше C_1E, что и требовалось доказать.

645. На отрезке AB — основании искомого треугольника — строим сегмент, вмещающий данный тупой угол (рис. 197). Пусть ACB — равнобедренный треугольник, а AC_1B — произвольный треугольник, где C и C_1 — точки на дуге AB. Требуется доказать, что медиана CD меньше медианы C_1D.

Из рис. 197 видно, что

$$OD+DC=OC_1$$

и

$$OC_1<OD+DC_1,$$

где O — центр дуги, вращающей данный угол. Сложив эти два соотношения, получим

$$OD+DC+OC_1<OC_1+OD+DC_1,$$

откуда

$$DC<DC_1,$$

что и требовалось доказать.

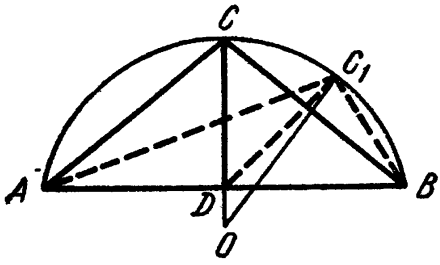

Рис. 197.

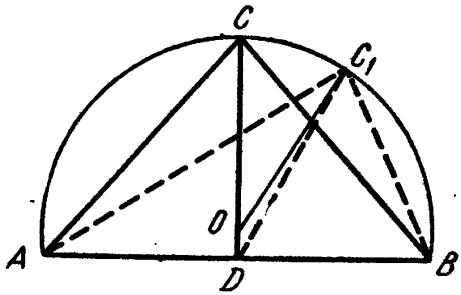

Рис. 198.

646. На отрезке AB — основании искомого треугольника — строим сегмент, вмещающий данный острый угол (рис. 198). Пусть ACB — равнобедренный треугольник, а AC_1B — произвольный треугольник, где C и C_1 — точки на дуге AB. Пусть D — основания медиан CD и C_1D, O — центр круга.

Из рис. 198 видно, что

$$OC=OC_1$$

и

$$OC_1+OD>DC_1.$$

Сложив эти два соотношения, получим

$$OC+OC_1+OD>OC_1+DC_1,$$

или

$$DC>DC_1,$$

что и требовалось доказать.

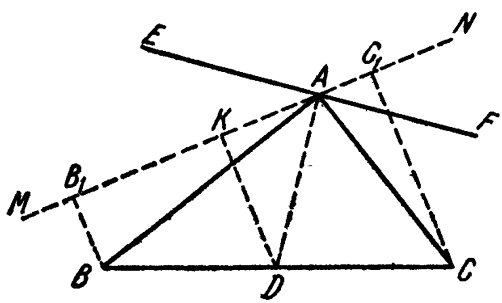

Рис. 199.

647. Через вершину A проведем произвольную прямую MN (рис. 199). Из точек B, C и середины D стороны BC опустим перпендикуляры BB_1, CC_1, DK на MN. Сумма расстояний от вершин B и C до прямой MN равна $BB_1+CC_1=2KD$, где KD — средняя линия трапеции BB_1C_1C. Очевидно, что DK принимает наибольшее значение, когда KD совпадает с медианой (AD) треугольника ABC, так как KD не больше медианы AD.

Итак, искомая прямая EF должна быть перпендикулярной к медиане AD.

648. По условию задачи $BC=BD+CE$ (рис. 200), поэтому

$$AD+AE=AB+AC+BC.$$

Но так как из треугольников, у которых есть общий угол и сумма сторон, заключающих этот угол, постоянна, наименьшую третью сторону имеет равнобедренный (см. ниже задачу 666), то DE будет принимать наименьшее значение, когда

$$AD=AE=0{,}5\,(AB+AC+BC).$$

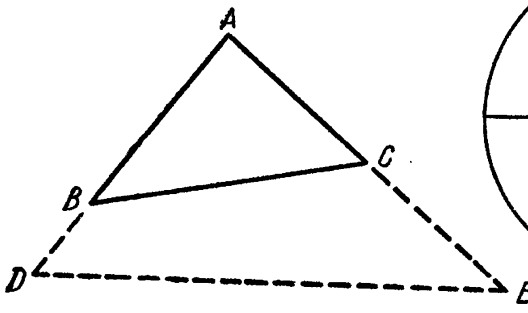

Рис. 200.

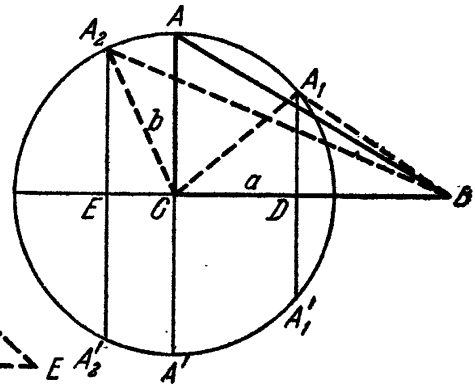

Рис. 201.

649. Первое решение. Пусть стороны треугольника a и b, а угол между ними C, тогда его площадь

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Так как наибольшее значение $\sin C=1$, когда угол C прямой, то и наибольшая площадь треугольника будет при перпендикулярности сторон a и b.

Второе решение (рис. 201). Примем отрезок CB, равный a, за основание треугольников: $\triangle A_1CB$ (угол C острый), $\triangle ACB$ (угол C прямой), $\triangle A_2CB$ (угол C тупой), у которых $A_1C=AC=A_2C=b$.

Из точки C опишем дугу радиусом, равным b. Эта дуга пройдет через A_1, A и A_2.

Так как половина хорды не больше радиуса, то высоты A_1D и A_2E треугольников A_1CB и A_2CB меньше высоты AC прямоугольного треугольника ACB, и поскольку у этих трех треугольников общее основание, то наибольшую площадь имеет треугольник ACB.

650. Пусть прямоугольник $DEFK$ вписан в треугольник ABC так, что KF принадлежит AB, а вершины D и E лежат на сторонах AC и BC (рис. 202). Высота CN треугольника пересекает DE в точке M.

Из подобия треугольников CDE и CAB имеем

$$\frac{CM}{CN}=\frac{DE}{AB},$$

или

$$\frac{CN-DK}{CN}=\frac{DE}{AB}. \qquad (1)$$

Пусть

$$AB=a,\quad CN=H,\quad DK=x,\quad DE=y,$$

тогда (1) перепишется так:

$$\frac{H-x}{H}=\frac{y}{a},$$

откуда

$$y=\frac{a}{H}(H-x). \qquad (2)$$

Так как площадь прямоугольника $DEFK$

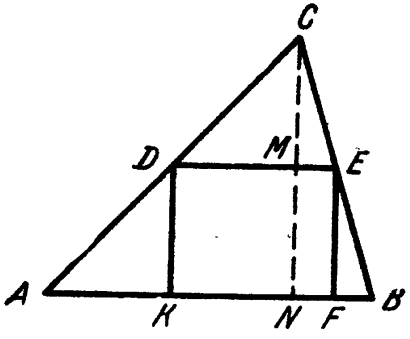

Рис. 202.

$$S=xy,$$

то, учитывая (2), получаем

$$S=\frac{a}{H}\cdot x(H-x).$$

Поскольку $\frac{a}{H}$ — постоянная величина, то S принимает наибольшее значение, когда произведение $x(H-x)$ достигает максимума. Но так как сумма $x+(H-x)=H$ — постоянная величина, то произведение $x(H-x)$ становится наибольшим, тогда $x=H-x$, откуда $x=\frac{H}{2}$, что и требовалось доказать

651. Первое решение. Обозначим радиус круга через R, а одну из сторон прямоугольника через x, тогда другая сторона прямоугольника будет равна $\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь прямоугольника

$$S=x\sqrt{4R^2-x^2}.$$

Ясно, что S и S^2 достигают максимального значения при одном и том же значении x, поэтому будем находить значение x, при котором S^2 принимает наибольшее значение

$$S^2=x^2(4R^2-x^2).$$

Так как сумма $x^2+(4R^2-x^2)=4R^2$ — постоянная величина, то S^2, а следовательно и S, достигает максимума при равенстве x^2 и $4R^2-x^2$.

Итак,

$$x^2=4R^2-x^2,$$

откуда

$$x=R\sqrt{2}.$$

Таким образом, каждая сторона прямоугольника равна $R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат.

Второе решение. Пусть R — радиус круга, описанного около прямоугольника $ABCD$ (рис. 203), а $\angle BAC=\alpha$. Тогда $AB=2R\cos\alpha$, $BC=2R\sin\alpha$, следовательно,

$$S_{ABCD}=2R^2\sin 2\alpha.$$

Площадь S_{ABCD} достигает максимума при $\sin 2\alpha=1$, т. е. при $2\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Тогда $AB=2R\cos\frac{\pi}{4}=2R\sin\frac{\pi}{4}=BC$, т. е. $ABCD$ — квадрат.

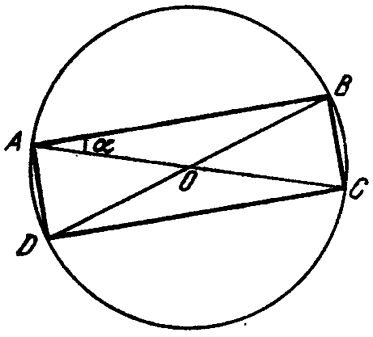

Рис. 203.

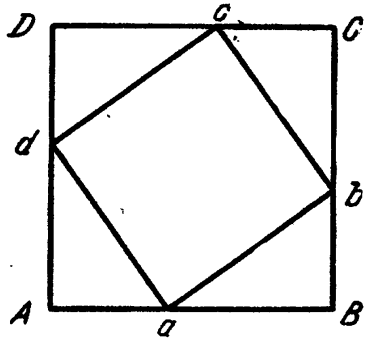

Рис. 204.

652. Первое решение. Пусть сторона квадрата AB равна k. Обозначим Aa через x, тогда $AB-Aa=k-x$, т. е. $aB=k-x$ (рис. 204).

По теореме Пифагора имеем

$$(ab)^2=x^2+(k-x)^2=2x^2-2kx+k^2.$$

Но площадь S квадрата $abcd$ равна $(ab)^2$. Значит,

$$S=2x^2-2kx+k^2.$$

Таким образом, наименьшее значение для S получится при

$$x=-\frac{-2k}{2\cdot 2}=\frac{k}{2}.$$

Итак, точки a, b, c, d должны быть серединами сторон квадрата $ABCD$.

Второе решение. Площадь квадрата $abcd$ окажется наименьшей, когда сумма площадей прямоугольных треугольников Aad, Bab, Cbc и Dcd будет наибольшей. Сумма катетов каждого из этих треугольников равна стороне (AB) данного квадрата, а поэтому площадь каждого из них достигает максимума при равенстве катетов. Последнее вытекает из того, что из всех прямоугольников, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

653. Опустим из вершины C прямого угла треугольника ABC (рис. 205) перпендикуляр CD на гипотенузу AB. Из полученной точки D опустим перпендикуляры DM и DN на катеты BC и AC. Образовавшийся прямоугольник $CMDN$ — искомый. Действительно, любой другой прямоугольник $CM_1D_1N_1$ имеет большую диагональ, так как его диагональ CD_1, являясь наклонной к AB, больше перпендикуляра CD.

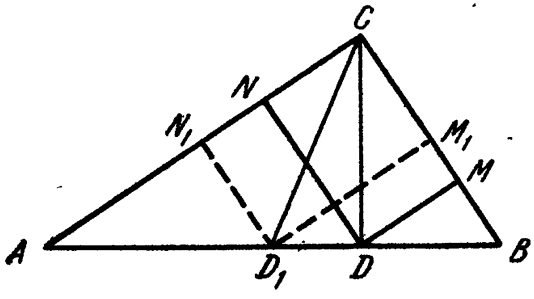

Рис. 205.

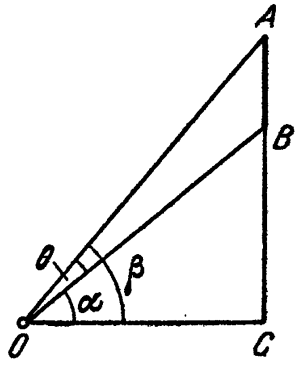

Рис. 206.

654. Пусть O — искомая точка (рис. 206). Обозначим расстояния CB и CA от вершины прямого угла соответственно через a и b, углы AOC и BOC через β и α, отрезок OC через x.

Имеем

$$\theta=\beta-\alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{x}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{x}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}.$$

Поскольку наибольшее значение острого угла θ достигается одновременно с наибольшим значением его тангенса и так как числитель $b-a$ есть постоянная величина, то надо найти наименьшее значение знаменателя $x+\frac{ab}{x}$.

Так как произведение слагаемых x и $\frac{ab}{x}$ есть постоянная величина, то сумма $x+\frac{ab}{x}$ принимает наименьшее значение при равенстве слагаемых.

Итак, $x=\frac{ab}{x}$, откуда $x=\sqrt{ab}$.

Ответ. Искомая точка O отстоит от вершины прямого угла C на расстоянии, равном $\sqrt{CA\cdot CB}$.

655. Даны прямая EF и точки A и B, лежащие по одну сторону от нее (рис. 207).

Через точку A_1, симметричную точке A относительно EF, и точку B проводим прямую, которая пересекает EF в точке M.

Докажем, что точка M является искомой.

Предположим, что другая точка M_1 прямой EF — искомая.

Из рис. 207 видим, что

$$AM+BM=A_1M+BM=A_1B$$

и

$$AM_1+BM_1=A_1M_1+BM_1>A_1B.$$

Из этих двух соотношений заключаем, что

$$AM+BM<AM_1+BM_1,$$

т. е. точка M является искомой.

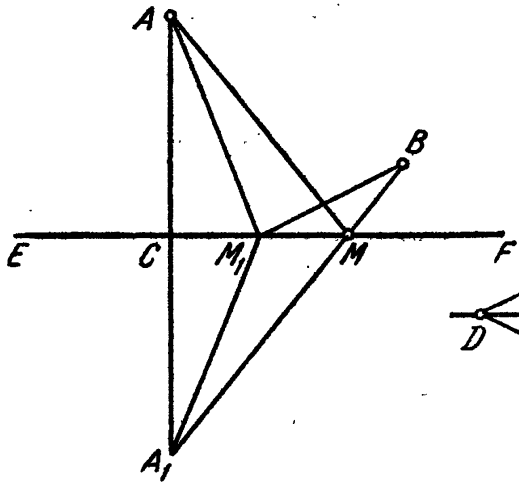

Рис. 207.

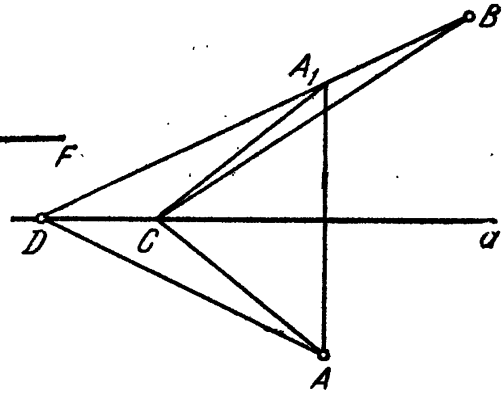

Рис. 208.

656. Пусть C (рис. 208) есть некоторая точка прямой a. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно a; тогда $CA=CA_1$. Следовательно, при любом положении точки C будет иметь место $CB-CA=CB-CA_1$. Если треугольник CA_1B существует, то $CB-CA_1<A_1B$. Когда точка C совпадает с точкой D (D — точка пересечения a с BA_1), разность $DB-DA_1$ делается равной A_1B. Это и есть наибольшая величина рассматриваемой разности.

Отсюда вытекает и построение: отражаем точку A относительно прямой a в точку A_1. Потом проводим прямую BA_1 до пересечения в точке D с прямой a. Точка D является искомой.

657. На стороне AC треугольника ABC (рис. 209) возьмем три точки: вершины A и C и произвольную точку M между ними.

Для определенности пусть угол A больше угла C, тогда расстояние AN от A до стороны BC будет меньше, чем расстояние CL от C до стороны AB. Остается сравнить сумму расстояний $MF+ME$ от точки M до сторон BC и AB с AN.

Из точки M опустим перпендикуляр MK на AN. Из рис. 209 видим, что достаточно сравнить отрезки AK и ME, так как $KN = MF$.

Катет AK меньше катета ME, так как прямоугольные треугольники AKM и AEM имеют общую гипотенузу и угол EAM больше угла KMA $(=BCA)$.

Итак,

$$AK + KN < MF + ME,$$

или

$$AN < MF + ME,$$

т. е. вершина A большего угла при AC является искомой точкой.

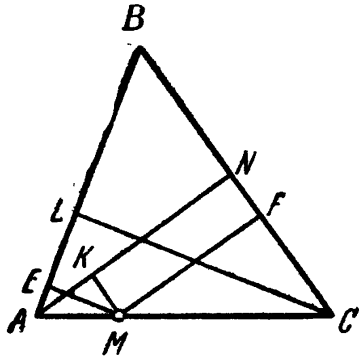

Рис. 209.

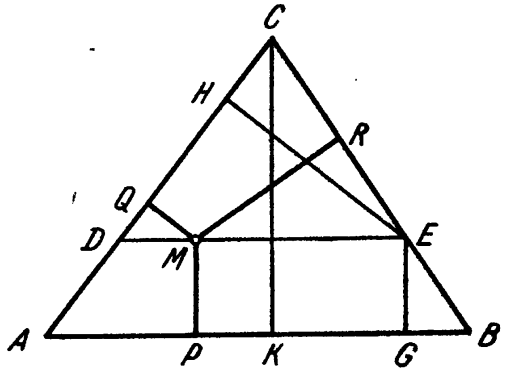

Рис. 210.

658. Для определенности пусть $\angle C \geqslant \angle B \geqslant \angle A$ (рис. 210).

Через произвольную точку M, взятую внутри треугольника, проведем прямую $DE \parallel AB$ (точка D на AC; точка E на BC).

Из точки M опустим перпендикуляры MQ и MR на AC и BC, а из точки E — перпендикуляр EH на AC.

Из задачи 657 следует, что в треугольнике DCE

$$EH < MQ + MR. \tag{1}$$

Из точек M и E опускаем перпендикуляры MP и EG на AB.

Так как $MP = EG$, то (1) можно переписать так:

$$EH + EG < MQ + MR + MP. \tag{2}$$

В треугольнике ACB (см. задачу 657)

$$CK < EG + EH. \tag{3}$$

Из (2) и (3) имеем окончательно

$$CK < MQ + MR + MP,$$

т. е. высота CK, опущенная из вершины наибольшего угла, есть наименьшее значение для суммы $MQ + MR + MP$.

659. Обозначим угол ABC через α (рис. 211). Из прямоугольных треугольников ABC и ACD имеем

$$AC = AB \sin\alpha = 2R \sin\alpha, \qquad (1)$$
$$CD = AC \cos\alpha = 2R \sin\alpha \cos\alpha,$$

откуда

$$AC \cdot CD = 4R^2 \sin^2\alpha \cos\alpha.$$

Обозначим выражение $\sin^2\alpha \cos\alpha$ через y. Произведение $AC \cdot CD$ достигает максимума вместе с y, а потому и вместе с y^2.

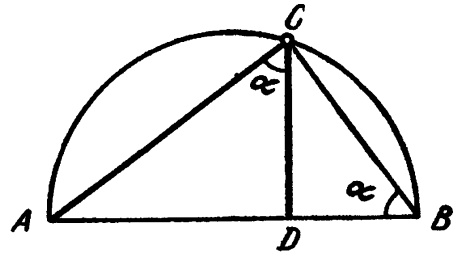

Рис. 211.

$$y^2 = \sin^4\alpha \cos^2\alpha =$$
$$= \sin^2\alpha \sin^2\alpha (1 - \sin^2\alpha) =$$
$$= 4 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} (1 - \sin^2\alpha).$$

Так как $\frac{\sin^2\alpha}{2} + \frac{\sin^2\alpha}{2} + (1 - \sin^2\alpha) = 1$ — постоянная величина, то y^2 достигает максимума при

$$\frac{\sin^2\alpha}{2} = 1 - \sin^2\alpha,$$

отсюда

$$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем

$$AD = AC \sin\alpha = 2R \sin^2\alpha = \frac{4R}{3}.$$

Итак, для построения точки C достаточно на диаметре AB отложить отрезок $AD = \frac{4R}{3}$ и из точки D провести перпендикуляр к диаметру AB до встречи с окружностью в точке C.

660. В каком бы месте окружности, по одну сторону от хорды AB, ни была взята точка C (рис. 212), угол ACB будет иметь постоянное значение, которое обозначим через α. При всяком положении точки C выражение $\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\alpha$ будет представлять площадь S треугольника ACB. Отличаясь от произведения $AC \cdot BC$ постоянным множителем $\frac{1}{2}\sin\alpha$, оно будет иметь максимум одновременно с $AC \cdot BC$. Но максимум площади треугольника ACB, имеющего постоянное основание AB, будет при наибольшем значении высоты его, что, очевидно, может быть только тогда, когда

вершина C будет находиться в точке пересечения окружности с перпендикуляром, проведенным из середины AB, и, очевидно, в той из двух точек пересечения, которая будет отстоять дальше от AB. На нашем рисунке C_1 — искомая точка.

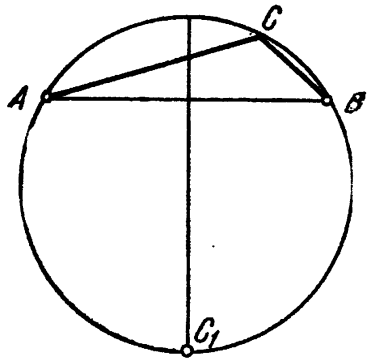

Рис. 212.

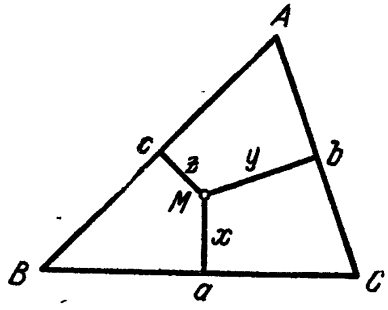

Рис. 213.

661. Обозначим через x, y, z расстояния от точки M, взятой внутри треугольника ABC, до его сторон (рис. 213). Тогда площадь треугольника

$$S=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2},$$

откуда

$$ax+by+cz=2S,$$

т. е. $ax+by+cz$ — постоянная величина.

Произведение xyz принимает наибольшее значение тогда, когда достигает наибольшего значения $ax\cdot by\cdot cz$. Последнее имеет место, когда

$$ax=by=cz=\frac{2S}{3},$$

откуда

$$x=\frac{2S}{3a}=\frac{ah_a}{3a}=\frac{h_a}{3},\quad y=\frac{h_b}{3},\quad z=\frac{h_c}{3},$$

где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC.

Из последних трех равенств заключаем, что искомая точка — точка пересечения медиан.

662. Через данную точку P проведем две хорды: одну хорду AB перпендикулярно к диаметру, проходящему через P, а другую произвольную хорду A_1B_1 (рис. 214). Опустив перпендикуляр OP_1 на A_1B_1, получим прямоугольный треугольник OP_1P, у которого гипотенуза OP больше катета OP_1, а следовательно, AB меньше A_1B_1.

Итак, наименьшая хорда, проходящая через точку P,— это хорда, перпендикулярная к диаметру, проходящему через эту точку.

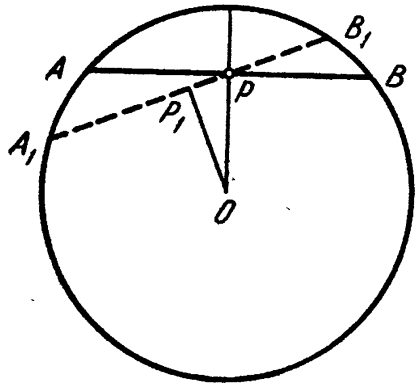

Рис. 214.

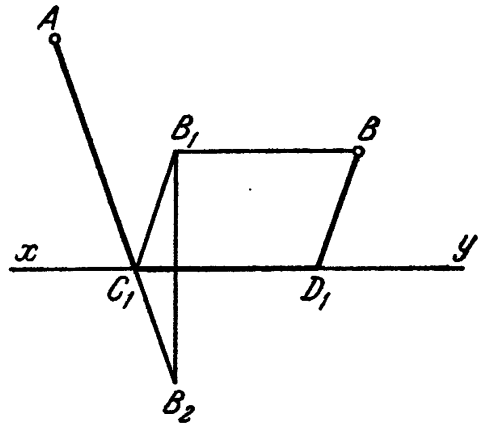

Рис. 215.

663. Задача сводится к нахождению наименьшей суммы

$$AC+CD+DB.$$

Но так как CD — постоянная величина, то нам надо найти наименьшую сумму

$$AC+DB.$$

Перенесем точку B параллельно прямой xy (рис. 215) на расстояние CD в некоторую точку B_1, потом отразим точку B_1 в точку B_2 относительно xy; затем соединяем отрезком точки A и B_2. Этот отрезок пересекает прямую xy в точке C_1. Далее, от точки C_1 откладываем на прямой xy отрезок C_1D_1, равный CD. Положение C_1D_1 и есть искомое положение отрезка CD.

Действительно, нам надо найти наименьшую сумму $AC+DB$, которая равна $AC_1+B_1C_1$. Но в силу нашего построения $AC_1+B_1C_1=AC_1+B_2C_1$; следовательно, перед нами стояла задача найти кратчайшее расстояние между точками A и B_2, а это кратчайшее расстояние есть отрезок AB_2, который равен сумме $AC_1+C_1B_2$, которая в свою очередь равна $AC+DB$.

664. Возьмем на сторонах угла xOy произвольные две точки B_1 и C_1 и рассмотрим периметр треугольника AB_1C_1 (рис. 216). Построив точку A_1, симметричную точке A относительно Ox, а также точку A_2, симметричную точке A относительно Oy, и соединив точку A_1 с B_1 и A_2 с C_1, получим ломаную линию $A_1B_1C_1A_2$, состоящую из трех отрезков, концы которых находятся в точках A_1 и A_2 и которые равны периметру треугольника AB_1C_1.

В самом деле, длина ломаной линии равна

$$l=A_1B_1+B_1C_1+C_1A_2.$$

Но $A_1B_1=AB_1$ и $C_1A_2=AC_1$, а поэтому

$$l=AB_1+B_1C_1+AC_1.$$

Эта сумма отрезков есть периметр треугольника AB_1C_1.

Поскольку кратчайшее расстояние между двумя точками A_1 и A_2 есть прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки, то, значит, искомые точки B и C находятся на прямой A_1A_2.

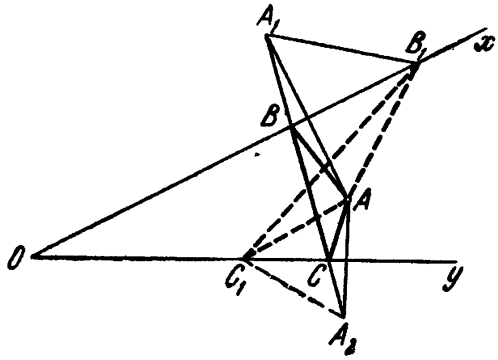

Рис. 216.

Отсюда и построение: строим точку A_1, симметричную A относительно Ox, далее строим точку A_2, симметричную A относительно Oy. Потом через точки A_1 и A_2 проводим прямую, которая пересекает Ox и Oy в точках B и C. Эти точки и являются вершинами искомого треугольника, имеющего наименьший периметр, равный отрезку A_1A_2.

665. Если a, b, c — стороны треугольника, а A, B, C — противолежащие им углы, то имеем

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C=2R\sin(A+B),$$

где R — радиус описанной окружности

$$y=a^2+b^2+c^2=4R^2[\sin^2A+\sin^2B+\sin^2(A+B)]=$$

$$=4R^2\left[\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2(A+B)\right]=$$

$$=4R^2[2-\cos(A-B)\cdot\cos(A+B)-\cos^2(A+B)].$$

Очевидно, что y достигает максимума при тех же значениях A и B, что и выражение, стоящее в квадратных скобках, которое обозначим через x:

$$x=2-\cos(A-B)\cos(A+B)-\cos^2(A+B).$$

Из этого равенства следует, что

$$\cos(A+B)=\frac{-\cos(A-B)\pm\sqrt{\cos^2(A-B)+8-4x}}{2}.$$

Для существования $\cos(A+B)$ необходимо, чтобы

$$\cos^2(A-B)+8-4x\geqslant 0.$$

Отсюда

$$x\leqslant\frac{\cos^2(A-B)+8}{4}.$$

Очевидно, что x достигает максимума при $\cos(A-B)=1$, т. е. при $A=B$.

Поскольку A и B взяты произвольно, то треугольник, вписанный в данную окружность, у которого сумма квадратов сторон имеет наибольшую величину, равносторонний.

666. Первое решение. Рассмотрим два треугольника (рис. 217): равнобедренный ABC ($AB=AC$) и ADE, у которых общий угол A и

$$AB+AC=AD+AE, \qquad (1)$$

т. е. $BD=EC$.

Из точек D и E опустим перпендикуляры DK и EF на прямую BC. Легко убедиться, что треугольники BDK и CEF равны между собой. Из равенства этих треугольников следует, что $BK=CF$, а потому $KF=BC$. Но KF является проекцией DE на прямую BC, поэтому $KF<DE$, т. е.

$$BC<DE. \qquad (2)$$

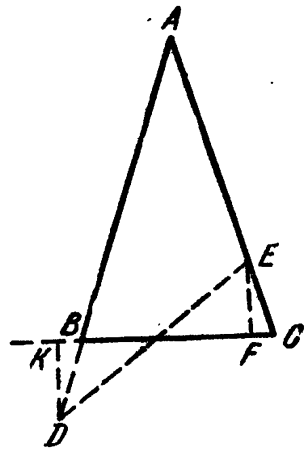

Рис. 217.

В силу соотношений (1) и (2) имеем

$$AB+AC+BC<AD+AE+DE,$$

т. е. у равнобедренного треугольника периметр меньше, чем у любого другого треугольника, если эти треугольники удовлетворяют условию задачи.

Второе решение. Введем обозначения $AB=AC=a$, $BD=CE=x$.

Из треугольника DAE имеем

$$DE^2=(a+x)^2+(a-x)^2-2(a^2-x^2)\cos A. \qquad (1)$$

Из треугольника BAC следует

$$BC^2=2a^2-2a^2\cos A. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (1) равенство (2), получим

$$DE^2-BC^2=2x^2+2x^2\cos A=2x^2(1+\cos A).$$

Так как $1+\cos A>0$ и $x^2>0$, то

$$DE^2-BC^2>0,$$

откуда $DE>BC$, и мы пришли к такому же заключению, как и в первом решении.

667. Предположим, что в данный сегмент AMB (рис. 218) вписан искомый прямоугольник $CEFD$. Пусть $OF=r$, $OH=a$, $OK=x$, $KF=y$.

Из прямоугольного треугольника OKF имеем

$$KF^2=OF^2-OK^2,$$

или

$$y^2=r^2-x^2,$$

откуда $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Площадь прямоугольника $CEFD$

$$S=2KF\cdot KH=2KF\,(OK-OH),$$

или

$$S=2y\,(x-a)=2\,(x-a)\,\sqrt{r^2-x^2}.$$

Выражение $(x-a)\sqrt{r^2-x^2}$ достигает максимума одновременно с квадратом этого выражения:

$$(x-a)^2\,(r^2-x^2)=(x-a)\,(x-a)\,(r+x)\,(r-x).$$

Известно, что произведение положительных сомножителей, сумма которых постоянна, достигает максимума при равенстве сомножителей. Но в нашем случае сумма сомножителей не есть постоянное число. Для того чтобы воспользоваться приведенной теоремой, введем два неопределенных коэффициента α и β, имеющих такое свойство, что при умножении на них двух неравных сомножителей $(r+x)$ и $(r-x)$ сумма всех четырех сомножителей становится постоянной, т. е. сумма

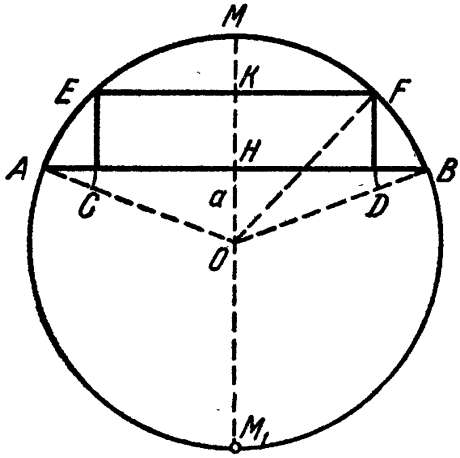

Рис. 218.

$$(x-a)+(x-a)+\alpha(r+x)+\beta(r-x)$$

или

$$(\alpha-\beta+2)\,x+\alpha r+\beta r-2a$$

делается постоянной величиной. Это возможно, когда $\alpha-\beta+2=0$. Условием для достижения максимума произведения $(x-a)\,(x-a)\times\alpha\,(r+x)\,\beta\,(r-x)$ является $x-a=\alpha\,(r+x)=\beta\,(r-x)$.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases}\alpha-\beta+2=0,\\ x-a=\alpha\,(r+x),\\ x-a=\beta\,(r-x).\end{cases}$$

Исключив из этих уравнений α и β, получим

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+8r^2}}{4}.$$

Знак плюс соответствует прямоугольнику, вписанному в данный сегмент AMB, а знак минус — прямоугольнику, вписанному в дополнительный сегмент AM_1B. Выражение для x легко построить на основании обыкновенных приемов приложения алгебры к геометрии. Условие возможности задачи сводится к тому, чтобы x было меньше r, т. е.

$$a\pm\sqrt{a^2+8r^2}<4r.$$

Это же неравенство приводит к условию $a<r$, которое всегда имеет место. Следовательно, задача всегда возможна.

В частном случае, когда $a=0$, имеем

$$x=\pm\frac{\sqrt{8r^2}}{4}=\pm\frac{r\sqrt{2}}{2},$$

т. е. если сегмент равен полукругу, то вписанный в него прямоугольник наибольшей площади составляет половину вписанного в целый круг квадрата.

668. Предварительно убедимся, что кратчайшим расстоянием между диагональю BD_1 и ребром AA_1 является отрезок OE, соединяющий их середины (рис. 219).

Известно, что кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми является их общий перпендикуляр. Докажем, что отрезок OE и есть общий перпендикуляр к BD_1 и AA_1. Очевидно, что треугольник BED_1 равнобедренный, а поэтому EO перпендикуляр к BD_1. Также ясно, что треугольник AOA_1 равнобедренный ($OA=OA_1$), а потому EO перпендикулярен к AA_1.

Площадь сечения BED_1E_1—параллелограмм; его площадь равна $2BD_1\cdot EO$. Поскольку любой отрезок, отличный от EO и соединяющий точки, принадлежащие BD_1 и AA_1 больше, чем EO, то очевидно, что утверждение задачи верно.

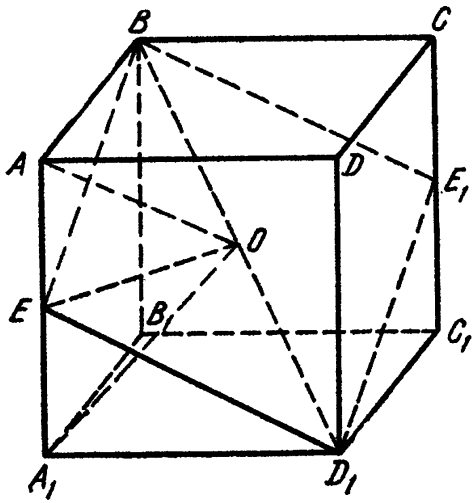

Рис. 219.

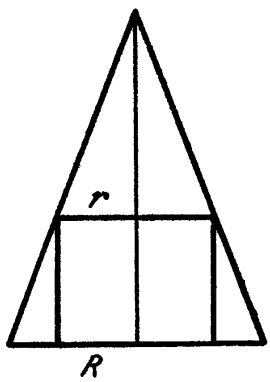

Рис. 220.

669. Обозначим через R радиус основания конуса, высоту его через H, радиус основания цилиндра через r, а высоту цилиндра через h.

Из рис. 220 усматриваем, что

$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R},\quad\text{откуда}\quad h=\frac{H}{R}(R-r).$$

Объем цилиндра

$$V=\pi r^2h=\pi r^2\cdot\frac{H}{R}(R-r)=\frac{4\pi H}{R}\,\frac{r}{2}\,\frac{r}{2}(R-r).$$

Поскольку $\frac{4\pi H}{R}$ — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с функцией

$$y=\frac{r}{2}\,\frac{r}{2}\,(R-r).$$

Так как сумма сомножителей $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}$ и $(R-r)$ есть постоянная величина R, то y будет наибольшим при

$$\frac{r}{2}=R-r,$$

откуда $\frac{r}{R}=\frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

670. Обозначим через R радиус шара, а через r и h соответственно радиус основания и высоту цилиндра (рис. 221). Пусть точка M — середина высоты цилиндра (центр шара), O — центр осиования цилиндра и A — произвольная точка окружности того же основания.

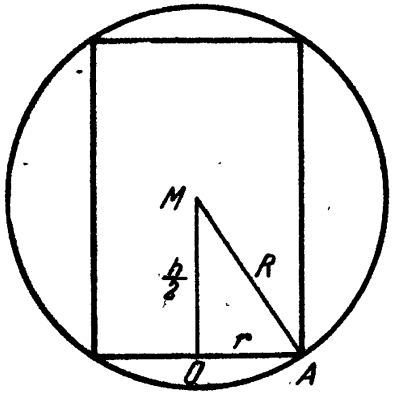

Рис. 221.

По теореме Пифагора имеем

$$OM^2=AM^2-OA^2,$$

или

$$\frac{h^2}{4}=R^2-r^2,$$

откуда

$$h=2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Боковая поверхность цилиндра

$$S=2\pi rh=2\pi r\cdot 2\sqrt{R^2-r^2}=$$

$$=4\pi r\sqrt{R^2-r^2}.$$

Ясно, что S и S^2 достигают наибольшего значения при одном и том же значении r. Поэтому будем искать то значение r, при котором S^2 принимает максимальное значение.

Имеем $S^2=16\pi^2r^2(R^2-r^2)$.

Так как $16\pi^2$ — постоянная величина, S^2 достигает максимального значения одновременно с выражением $y=r^2(R^2-r^2)$.

Поскольку сумма $r^2+(R^2-r^2)=R^2$ — постоянная величина, то y достигает наибольшего значения при равенстве r^2 и R^2-r^2.

Итак,

$$r^2=R^2-r^2,$$

откуда

$$r=\frac{R\sqrt{2}}{2},$$

а следовательно, $h=R\sqrt{2}$ и $2r=R\sqrt{2}$.

Таким образом, осевое сечение искомого цилиндра есть квадрат.

671. Обозначим через R и H соответственно радиус основания и высоту конуса, а через r и h радиус основания и высоту искомого цилиндра (рис. 222).

Пусть точка O — центр основания конуса, A — произвольная точка окружности его основания, точка K — центр основания цилиндра (не лежащего в одной плоскости с основанием конуса), B — точка окружности того же основания.

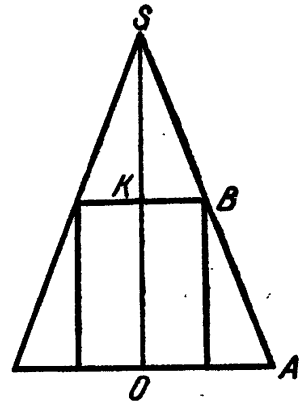

Рис. 222.

Из подобия треугольников SKB и SOA следует

$$\frac{SK}{SO}=\frac{BK}{AO},$$

или в наших обозначениях

$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R},$$

откуда

$$h=\frac{H}{R}(R-r).$$

Боковая поверхность цилиндра

$$S_{\text{бок}}=2\pi rh=2\pi r\,\frac{H}{R}\,(R-r)=\frac{2\pi H}{R}(-r^2+Rr).$$

Так как $\frac{2\pi H}{R}$ — постоянная величина, то $S_{\text{бок}}$ принимает максимальное значение, когда функция

$$y=-r^2+Rr$$

достигает максимума. Функция y достигает максимума при

$$r=-\frac{R}{-2}=\frac{R}{2},$$

а следовательно,

$$h=\frac{H}{R}\left(R-\frac{R}{2}\right)=\frac{H}{2},$$

что и требовалось доказать.

672. Обозначим радиус основания цилиндра через r, а его высоту через h (рис. 223).

Из рис. 223 видим, что

$$\frac{h^2}{4}=R^2-r^2, \quad \text{откуда} \quad h=2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Объем цилиндра

$$V=\pi r^2h=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Так как 2π — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с функцией

$$y=r^2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Ясно, что y^2 и y принимают наибольшие значения при одном и том же значении переменной r, поэтому будем находить значение r, для которого y^2 достигает максимума.

Имеем

$$y^2 = r^4 (R^2 - r^2),$$

или

$$y^2 = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \frac{r^2}{2} (R^2 - r^2).$$

Поскольку сумма трех сомножителей $\frac{r^2}{2}$, $\frac{r^2}{2}$ и $(R^2 - r^2)$ равна постоянной величине, то y^2, а следовательно и y, достигает наибольшей величины при равенстве этих сомножителей, т. е. при

$$\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2,$$

откуда

$$\frac{3r^2}{2} = R^2,$$

или окончательно,

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

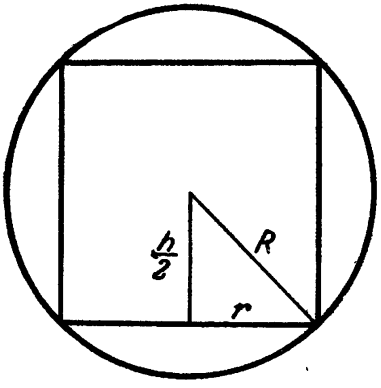

Рис. 223.

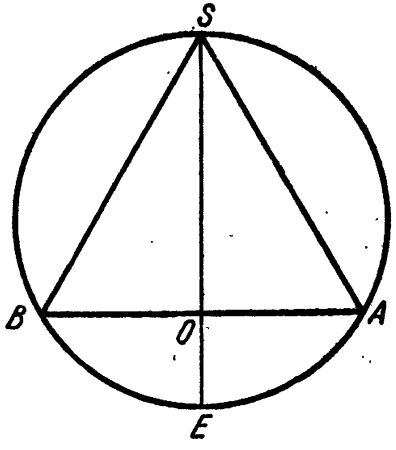

Рис. 224.

673. Обозначим через R радиус шара и через r и h соответственно радиус основания и высоту конуса (рис. 224). Продолжим высоту SO конуса до встречи с шаровой поверхностью в точке E. Так как $SE = 2R$, а $SO = h$, то $OE = 2R - h$.

На основании теоремы, что перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится диаметр основанием этого перпендикуляра, имеем

$$AO^2 = SO \cdot OE,$$

или в наших обозначениях

$$r^2 = h(2R - h),$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} h^2 (2R - h) = \frac{4\pi}{3} \frac{h}{2} \frac{h}{2} (2R - h).$$

Так как $\frac{4\pi}{3}$ — постоянная величина, то V достигает максимума одновременно с произведением $y = \frac{h}{2} \frac{h}{2} (2R - h)$.

Поскольку сумма сомножителей $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{2}$ и $(2R - h)$ есть постоянная величина $2R$, то y достигает максимума при равенстве этих сомножителей, т. е. при

$$\frac{h}{2} = 2R - h,$$

откуда $\frac{R}{h} = \frac{3}{4}$.

674. Пусть измерения параллелепипеда x, y, z, тогда его боковая поверхность равна $2(xy + xz + yz)$. Очевидно, что

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy, \quad x^2 + z^2 \geqslant 2xz, \quad y^2 + z^2 \geqslant 2yz.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + xz + yz).$$

Но так как $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, то $2(xy + xz + yz) \leqslant 2a^2$. Следовательно, наибольшая боковая поверхность равна $2a^2$.

675. Обозначим сторону вырезаемого квадрата через x, тогда сторона квадратного дна коробки будет равна $6a - 2x$ (рис. 225). Высота коробки x. Объем коробки

$$V = (6a - 2x)^2 x = 4x(3a - x)(3a - x) = 2(2x)(3a - x)(3a - x).$$

Ясно, что V достигает максимума одновременно с функцией

$$y = (2x)(3a - x)(3a - x).$$

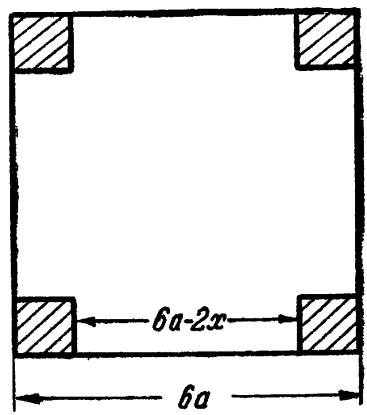

Рис. 225.

Так как $2x + (3a - x) + (3a - x) = 6a$, т. е. постоянная величина, то y принимает наибольшее значение при

$$2x = 3a - x,$$

откуда $x=a$, т. е. сторона вырезаемого квадрата должна быть в шесть раз меньше стороны листа жести, тогда объем коробки будет наибольшим.

676. Пусть прямая KM перпендикулярна к биссектрисе AD (рис. 226). Опустим из точек B и C перпендикуляры BB_1 и CC_1 на прямую KM и продолжим перпендикуляр CC_1 на отрезок C_1E, равный CC_1. Соединим прямой точки E и A и докажем, что линия BAE — прямая. Так как AD — биссектриса угла BAC, то

$$\angle BAB_1=\angle CAC_1 \qquad (1)$$

как дополнения равных углов до прямого.

Точки A и B_1 лежат на перпендикуляре MK, проведенном через середину отрезка CE, а поэтому

$$AC=AE \text{ и } B_1C=B_1E. \qquad (2)$$

Следовательно, треугольник CAE равнобедренный и его высота AC_1 является биссектрисой угла CAE, т. е.

$$\angle EAC_1=\angle CAC_1. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует, что $\angle BAB_1=\angle EAC_1$, но B_1AM — прямая, следовательно, и линия BAE — прямая.

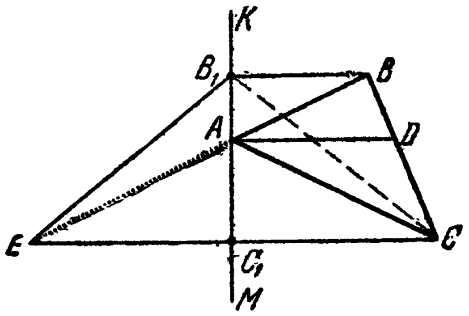

Рис. 226.

Из треугольника BB_1E следует, что

$$BA+AE<BB_1+B_1E,$$

или, учитывая равенства (2), имеем

$$BA+AC<BB_1+B_1C.$$

Прибавив к обеим частям последнего неравенства по BC, получим утверждение задачи:

$$BA+AC+BC<BB_1+B_1C+BC.$$

677. Обозначим сторону квадрата через a, тогда его периметр $4a$, а площадь a^2.

Известно, что из всех треугольников с данной площадью равносторонний имеет наименьший периметр (задача 641), поэтому мы можем предположить, что треугольник равносторонний.

Пусть сторона равностороннего треугольника равна b, тогда его периметр $3b$, а площадь $\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

Итак, дано $a^2=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, и требуется доказать, что $3b>4a$.

Рассмотрим разность

$$3b-4a=3b-2b\sqrt[4]{3}=b\sqrt[4]{3}\left(\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{16}\right)\geqslant 0.$$

Следовательно, $3b>4a$.

678. Обозначим одну из сторон загона, перпендикулярную к стене, через x ($м$) (рис. 227), тогда вторая сторона будет равна $(300-2x)$ ($м$), а площадь загона

$$S=x(300-2x),$$

или

$$S=2x(150-x).$$

Так как $x+150-x=150$, то S достигает максимума при $x=150-x$, т. е. при $x=75$ ($м$). Итак, $S_{max}=75\times150$ ($м^2$).

Таким образом, сторона забора, перпендикулярная к стене амбара, равна 75 $м$, а параллельная этой стене равна 150 $м$, т. е. загон имеет форму половины квадрата.

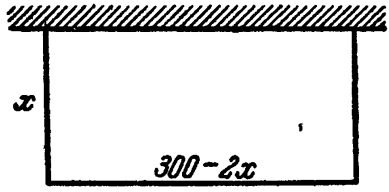

Рис. 227.

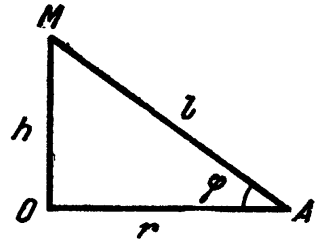

Рис. 228.

679. Обозначим радиус стола через r, центр его через O, высоту лампы над столом через h, расстояние AM от края A стола до лампы M через l и угол MAO через φ (рис. 228).

Из курса физики известно, что сила света J в точке A выражается формулой

$$J=k\frac{\sin\varphi}{l^2},$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

Так как $\cos\varphi=\frac{r}{l}$, то

$$J=\frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Поскольку J достигает максимума вместе с J^2, то рассмотрим

$$J^2=\frac{k^2}{r^4}\sin^2\varphi\cos^4\varphi=\frac{4k^2}{r^4}(1-\cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\frac{\cos^2\varphi}{2}.$$

Так как $\frac{4k^2}{r^4}$ — постоянная величина, то J^2 достигает максимума вместе с функцией

$$y=(1-\cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\frac{\cos^2\varphi}{2}.$$

Поскольку сумма сомножителей $(1-\cos^2\varphi)$, $\frac{\cos^2\varphi}{2}$ и $\frac{\cos^2\varphi}{2}$ есть

постоянная величина 1, то y принимает наибольшее значение при $1-\cos^2\varphi=\frac{\cos^2\varphi}{2}$, т. е. при $\cos\varphi=\sqrt{\frac{2}{3}}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

А так как $h=r\operatorname{tg}\varphi$, то

$$h=r\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7\ r.$$

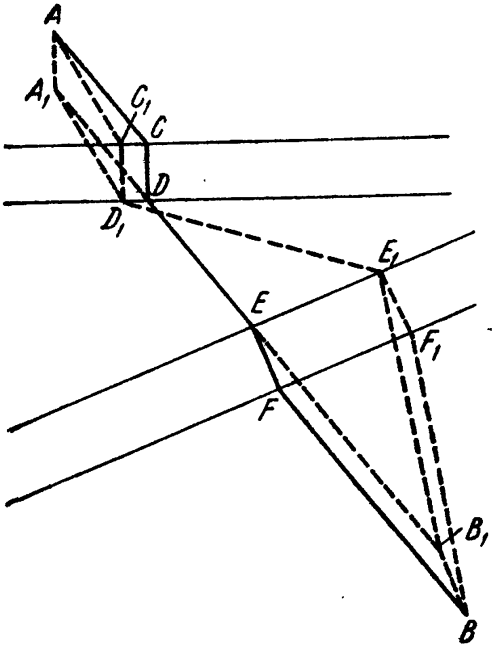

Рис. 229.

680. Искомый путь представляет собой ломаную линию, состоящую из пяти отрезков, два из которых (переходы по мостам) даны по величине и направлению (рис. 229). Чтобы исключить эти два отрезка, представим, что каждый город приближен к ближайшей реке на расстояние, равное ширине этой реки. Пусть города A и B перемещены соответственно в пункты A_1 и B_1. Тогда отрезок A_1B_1 — кратчайший путь от A_1 до B_1.

Отрезок A_1B_1 пересекает берега рек в точках D и E. Построив мосты, проходящие через точки D и E (DC и EF), получим искомый кратчайший путь $ACDEFB$. Сравним длину этого пути с любым другим, например с $AC_1D_1E_1F_1B$.

Длина ломаной $AC_1D_1E_1F_1B$ равна длине ломаной $AA_1D_1E_1B_1B$, часть которой $A_1D_1E_1B_1$ длиннее отрезка A_1B_1, а поэтому ломаная $ACDEFB$ короче ломаной $AC_1D_1E_1F_1B$.

Глава XVI

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИИ

681. Из второго соотношения, заданного в условии задачи, получаем

$$\sin 2B=\frac{3}{2}\sin 2A,$$

а из первого соотношения

$$3\sin^2 A=1-2\sin^2 B=\cos 2B,$$

следовательно,

$$\cos(A+2B)=\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B=$$
$$=\cos A\cdot 3\sin^2 A-\frac{3}{2}\sin A\sin 2A=$$
$$=3\cos A\sin^2 A-3\sin^2 A\cos A=0.$$

Поэтому $A+2B=90°$.

682. Известно, что если $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$, то имеет место производная пропорция

$$\frac{x+u}{y+v}=\frac{x-u}{y-v}.$$

Образуем производную пропорцию из заданного в условии равенства

$$\frac{a^2-1+1+2a\cos\beta+a^2}{1+2a\cos\alpha+a^2+a^2-1}=\frac{a^2-1-1-2a\cos\beta-a^2}{1+2a\cos\alpha+a^2-a^2+1},$$

откуда

$$\frac{a+\cos\beta}{a+\cos\alpha}=\frac{-1-a\cos\beta}{1+a\cos\alpha}.$$

Таким же образом составим вторично производную пропорцию

$$\frac{(1-a)(1-\cos\beta)}{(1+a)(1+\cos\alpha)}=\frac{(1+a)(1+\cos\beta)}{(1-a)(1-\cos\alpha)}.$$

Отсюда

$$\frac{(1-\cos\beta)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)}=\frac{(1+a)^2}{(1-a)^2},$$

или

$$\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}\,2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\beta}{2}\,2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\pm\frac{1+a}{1-a}.$$

683. Умножим обе части заданного равенства на $a+b$. Имеем

$$\sin^4\alpha+\frac{b}{a}\sin^4\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha+\cos^4\alpha=1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2,$$

или

$$\frac{b}{a}\sin^4\alpha=2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\frac{a}{b}\cos^4\alpha=0,$$

откуда

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\alpha-\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha\right)^2=0,$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\sin^2\alpha=\sqrt{\frac{a}{b}}\cos^2\alpha,$$

откуда

$$\sin^4\alpha=\frac{a^2\cos^4\alpha}{b^2}, \tag{1}$$

или

$$\cos^4\alpha=\frac{b^2\sin^4\alpha}{a^2}. \tag{2}$$

Подставив в заданном в условии равенстве вместо $\sin^4\alpha$ выражение (1), получим

$$\cos^4\alpha=\frac{b^2}{(a+b)^2}. \tag{3}$$

Если же в данное уравнение подставить вместо $\cos^4\alpha$ выражение (2), то получим

$$\sin^4\alpha=\frac{a^2}{(a+b)^2}. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) возведем в квадрат, получим

$$\sin^8\alpha=\frac{a^4}{(a+b)^4}, \quad \cos^8\alpha=\frac{b^4}{(a+b)^4},$$

откуда

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}=\frac{a}{(a+b)^4}, \quad \frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{b}{(a+b)^4}.$$

Сложив последние два равенства, получим

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3},$$

что и требовалось доказать.

684. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned}\cos(x+y+z)&=\cos(x+y)\cos z-\sin(x+y)\sin z=\\&=\cos x\cos y\cos z-\sin x\sin y\cos z-\\&\quad-\sin x\cos y\sin z-\cos x\sin y\sin z=\\&=\cos x\cos y\cos z\,(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z).\end{aligned}$$

Так как $x+y+z=\frac{\pi}{2}k$, то

$$S=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}=$$

$$=1-\frac{\cos\frac{\pi}{2}k}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Ясно, что если k нечетно, то $S=1$ и не зависит от x, y, z.

685. Первое решение. Имеем

$$y=\frac{2-m(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)}{(1-m\sin 2\alpha)(1-m\sin 2\beta)}=$$

$$=\frac{2[1-m\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)]}{1-m(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+m^2\sin 2\alpha\sin 2\beta}=$$

$$=\frac{2[1-m\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)]}{1-2m\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\frac{m^2}{2}[\cos 2(\alpha-\beta)-\cos 2(\alpha+\beta)]}.$$

Но так как по условию $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{m}$, то

$$y=\frac{2[1-\cos^2(\alpha-\beta)]}{1-2\cos^2(\alpha-\beta)+\frac{m^2}{2}[\cos 2(\alpha-\beta)-\cos 2(\alpha+\beta)]}=$$

$$=\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{1-2\cos^2(\alpha-\beta)+\frac{m^2}{2}[2\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos^2(\alpha+\beta)]}=$$

$$=\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{1-2\cos^2(\alpha-\beta)+m^2[\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)]}$$

Из условия следует, что

$$\cos^2(\alpha-\beta)=m^2\sin^2(\alpha+\beta),$$
$$\sin^2(\alpha-\beta)=1-m^2\sin^2(\alpha+\beta).$$

Поэтому

$$y=\frac{2[1-m^2\sin^2(\alpha+\beta)]}{1-2m^2\sin^2(\alpha+\beta)+m^2[m^2\sin^2(\alpha+\beta)-1+\sin^2(\alpha+\beta)]}=$$

$$=\frac{2[1-m^2\sin^2(\alpha+\beta)]}{1-m^2\sin^2(\alpha+\beta)-m^2+m^4\sin^2(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{2[1-m^2\sin^2(\alpha+\beta)]}{(1-m^2)[1-m^2\sin^2(\alpha+\beta)]}=\frac{2}{1-m^2}.$$

Второе решение. Из условия следует, что

$$\frac{1}{m}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)},$$

поэтому

$$\frac{1}{m\sin 2\alpha}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha\cos(\alpha-\beta)}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\sin(3\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{1}{1-m\sin 2\alpha}=\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(3\alpha-\beta)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\alpha\sin(\beta-\alpha)}.$$

Так как заданное в условии равенство симметрично относительно α и β, то по аналогии получим

$$\frac{1}{1-m\sin 2\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\beta\sin(\alpha-\beta)}=-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\beta\sin(\beta-\alpha)},$$

$$y=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}-\frac{1}{\cos 2\beta}\right)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}\,\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}=$$

$$=-\frac{2\sin^2(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\,\frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)\right]}=$$

$$=-\frac{4\sin^2(\alpha+\beta)}{1-2\sin^2(\alpha+\beta)+2\cos^2(\alpha-\beta)-1}=$$

$$=\frac{4\sin^2(\alpha+\beta)}{2\left[\sin^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)\right]}=\frac{2\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)-m^2\sin^2(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{2}{1-m^2}.$$

686. Из условия следует, что

$$b=\frac{a\cos(x+\alpha)}{\cos x},\quad c=\frac{a\cos(x+2\alpha)}{\cos x},\quad d=\frac{a\cos(x+3\alpha)}{\cos x}.$$

Левая часть доказываемого равенства

$$(a+c)\,c=\left[a+\frac{a\cos(x+2\alpha)}{\cos x}\right]\frac{a\cos(x+2\alpha)}{\cos x}=$$

$$=\frac{a^2\left[\cos x+\cos(x+2\alpha)\right]\cos(x+2\alpha)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2a^2\cos\alpha\cos(x+\alpha)\cos(x+2\alpha)}{\cos^2 x}. \qquad (1)$$

Правая часть доказываемого равенства

$$(b+d)\,b=\left[\frac{a\cos(x+\alpha)}{\cos x}+\frac{a\cos(x+3\alpha)}{\cos x}\right]\frac{a\cos(x+\alpha)}{\cos x}=$$

$$=\frac{a^2\left[\cos(x+\alpha)+\cos(x+3\alpha)\right]\cos(x+\alpha)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2a^2\cos\alpha\cos(x+\alpha)\cos(x+2\alpha)}{\cos^2 x}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $(a+c)\,c=(b+d)\,b$.

687. Сначала заметим, что

$$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=\frac{\sin^2\frac{y}{2}}{\cos^2\frac{y}{2}}=\frac{1-\cos y}{1+\cos y}.$$

Далее в силу условий задачи

$$\cos y=\frac{\cos z}{\cos x}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}=\frac{\cos x-\cos z}{\cos x+\cos z}=\frac{2\sin\frac{z+x}{2}\sin\frac{z-x}{2}}{2\cos\frac{z+x}{2}\cos\frac{z-x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{z+x}{2}\operatorname{tg}\frac{z-x}{2}.$$

688. Пользуясь формулой для $\sin(\alpha+\beta)$, преобразуем соотношение $\sin\alpha=A\sin(\alpha+\beta)$ к виду

$$\sin\alpha(1-A\cos\beta)=A\cos\alpha\sin\beta.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{A\sin\beta}{1-A\cos\beta}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\sin\beta}{\cos\beta-A}.$$

689. Из заданного в условии соотношения составляем производную пропорцию

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{m+n}{m-n},$$

или

$$\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\frac{m+n}{m-n},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{m+n}{m-n},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}=\frac{m+n}{m-n},$$

или

$$\frac{1+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{m+n}{m-n},$$

откуда

$$\frac{1+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}.$$

690. Имеем

$$\operatorname{tg} x\,(1-\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z)=-(\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z),$$

откуда

$$\operatorname{tg} x=-\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}=-\operatorname{tg}(y+z)=\operatorname{tg}(-y-z).$$

Итак,

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(-y-z),$$

откуда

$$x=\pi k-(y+z),$$

т. е. $x+y+z=\pi k$.

691. Первое решение. Имеем

$$A=a\,(2\cos^2\alpha-1)+2b\sin\alpha\cos\alpha,$$

но так как $\sin\alpha=\frac{b\cos\alpha}{a}$, то

$$A=2a\cos^2\alpha-a+2b\cos\alpha\frac{b\cos\alpha}{a}=\cos^2\alpha\left(2a+\frac{2b^2}{a}\right)-a.$$

Из условия $\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}$ следует, что $\frac{\cos^2\alpha}{a^2}=\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$, или $b^2\cos^2\alpha=$ $=a^2-a^2\cos^2\alpha$. Отсюда $\cos^2\alpha=\frac{a^2}{a^2+b^2}$, следовательно,

$$A=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(2a+\frac{2b^2}{a}\right)-a=2a-a=a,$$

т. е. A зависит только от a.

Второе решение. Из условия следует, что $\frac{b}{a}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому

$$A=a\left(\cos 2\alpha+\frac{b}{a}\sin 2\alpha\right)=a\left(\cos 2\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin 2\alpha\right)=$$

$$=a\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}=a\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha}=a.$$

692. Рассмотрим разность

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-2\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}. \qquad (1)$$

Достаточно показать, что при условии

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta) \qquad (2)$$

эта разность равна нулю.

Пользуясь формулами, выражающими произведения тригонометрических функций через их суммы, преобразуем числитель дроби (1). Имеем

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=\frac{1}{2}[\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)],$$

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-2\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sin\beta-\sin(2\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}. \qquad (3)$$

Из (3) и (2) следует равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha.$$

693. Имеем

$$\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 4\alpha=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4\alpha-\frac{1}{4}\sin 6\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha.$$

Но так как

$$\frac{1}{4}|\sin 4\alpha-\sin 6\alpha+\sin 2\alpha|\leqslant\frac{1}{4}(|\sin 4\alpha|+|\sin 6\alpha|+|\sin 2\alpha|)\leqslant\frac{3}{4},$$

то $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\neq 1$ ни при каком α.

694. Имеем

$$y=\cos^2(\alpha+\beta)[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c]=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c].$$

Но так как по формулам Виета

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{c}{a},$$

то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{b}{c-a},$$

а потому

$$y=\frac{1}{1+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2}\left[a\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+b\left(\frac{b}{c-a}\right)+c\right]=c.$$

695. Перепишем условие в виде

$$2a\operatorname{tg}\alpha=2(1+\operatorname{tg}^2\alpha),$$

или

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2}{a},$$

или $\sin 2\alpha=\frac{2}{a}$, откуда

$$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}.$$

Радикал берем только со знаком плюс, так как $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$, а потому $\cos 2\alpha>0$.

696. Из условия задачи находим

$$\cos x = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}. \qquad (1)$$

Подставив $\cos x$ из (1) в тождество

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

получим

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

697. Из условия следует, что

$$\sin\alpha = A\sin\beta \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{A}{B}\cos\beta.$$

Возведем обе части этих равенств в квадрат

$$\sin^2\alpha = A^2\sin^2\beta, \qquad \cos^2\alpha = \frac{A^2}{B^2}(1-\sin^2\beta).$$

Сложив эти два равенства, получим

$$1 = A^2\left(1-\frac{1}{B^2}\right)\sin^2\beta + \frac{A^2}{B^2},$$

откуда

$$\sin^2\beta = \frac{B^2-A^2}{A^2(B^2-1)} \quad \text{и} \quad \sin\beta = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{B^2-A^2}{B^2-1}}.$$

Далее, возведя в квадрат обе части равенств

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{A}, \qquad \cos\beta = \frac{B\cos\alpha}{A},$$

получим

$$\sin^2\beta = \frac{\sin^2\alpha}{A^2}, \qquad \cos^2\beta = \frac{B^2\cos^2\alpha}{A^2}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$1 = \frac{\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha}{A^2} = \frac{1-\cos^2\alpha + B^2\cos^2\alpha}{A^2},$$

откуда

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}}.$$

Ответ. $\sin\beta = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{B^2-A^2}{B^2-1}}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}}$.

698. Поскольку $A+B+C=\pi$, то

$$A+B=\pi-C, \quad \cos(A+B) = -\cos C,$$

откуда

$$\cos(A+B)+\cos C = 0,$$

или

$$\cos A\cos B + \cos C = \sin A\sin B.$$

Далее

$$(\cos A\cos B+\cos C)^2=\sin^2 A\sin^2 B=(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B).$$

Отсюда

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1. \qquad (1)$$

Но так как

$$\cos A=\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos B=\cos\beta\sin\gamma,\quad \cos C=\cos\gamma\sin\alpha,$$

то (1) принимает вид

$$\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\gamma\sin^2\alpha+$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=1. \qquad (2)$$

Так как $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0$ (по смыслу задачи), то, поделив (2) на $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2\gamma}+\frac{\operatorname{tg}^2\gamma}{\cos^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\beta}+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma},$$

или

$$\operatorname{tg}^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\gamma)+\operatorname{tg}^2\gamma(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)+$$
$$+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1+\operatorname{tg}^2\gamma),$$

откуда

$$2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1+\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma,$$

или

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-1)^2=0;$$

отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1.$$

699. Пользуясь формулами косинуса и синуса двойного угла, преобразуем выражения для A_1, B_1 и C_1 так:

$$A_1=A\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+B\frac{\sin 2\alpha}{2}+C\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=$$
$$=\frac{A+C}{2}+\frac{B}{2}\sin 2\alpha+\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B_1=C\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha-A\sin 2\alpha=B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha;$$

$$C_1=\frac{A+C}{2}-\frac{B}{2}\sin 2\alpha-\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha;$$

$$B_1^2-4A_1C_1=[B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha]^2-$$
$$-4\left[\frac{A+C}{2}+\left(\frac{B}{2}\sin 2\alpha+\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right)\right]\times$$
$$\times\left[\frac{A+C}{2}-\left(\frac{B}{2}\sin 2\alpha+\frac{A-C}{2}\cos 2\alpha\right)\right]=$$
$$=B^2\cos^2 2\alpha-2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha+$$
$$+(A-C)^2\sin^2 2\alpha-(A+C)^2+[B\sin 2\alpha+(A-C)\cos 2\alpha]^2=$$
$$=B^2\cos^2 2\alpha-2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha+$$
$$+(A-C)^2\sin^2 2\alpha-(A+C)^2+B^2\sin^2 2\alpha+$$
$$+2B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha+(A-C)^2\cos^2 2\alpha=$$
$$=B^2(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)+(A-C)^2(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)-$$
$$-(A+C)^2=B^2+(A-C)^2-(A+C)^2=B^2-4AC.$$

700. Имеем

$$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2},$$

поэтому

$$\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2} \quad \text{и} \quad \cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2};$$

$$\frac{3C}{2}=\frac{3\pi}{2}-\frac{3(A+B)}{2},$$

следовательно,

$$\cos\frac{3C}{2}=-\sin\frac{3(A+B)}{2} \quad \text{и} \quad \cos\frac{3(A+B)}{2}=-\sin\frac{3C}{2}.$$

Учитывая эти соотношения, получаем

$$3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}=$$

$$=3\left[\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}}{2}\right]\cos\frac{C}{2}+\frac{\cos\frac{3(A-B)}{2}-\cos\frac{3(A+B)}{2}}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{3C}{2}=\frac{3}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3(A-B)}{2}\sin\frac{3(A+B)}{2}+\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B-\sin C)+\frac{1}{4}(-\sin 3A-\sin 3B+\sin 3C).$$

Учитывая условие задачи, имеем

$$3\sin A+3\sin B-3\sin C-\sin 3A-\sin 3B+\sin 3C=0,$$

откуда

$$2(\sin A+\sin B-\sin C)+(\sin A-\sin 3A)+(\sin B-\sin 3B)-$$
$$-(\sin C-\sin 3C)=0,$$
$$2\sin A+2\sin B-2\sin C-2\sin A\cos 2A-$$
$$-2\sin B\cos 2B+2\sin C\cos 2C=0,$$
$$2[\sin A(1-\cos 2A)+\sin B(1-\cos 2B)-\sin C(1-\cos 2C)]=0.$$

Поэтому

$$\sin^3 A+\sin^3 B=\sin^3 C.$$

Так как

$$\sin A=\frac{a}{2R}, \quad \sin B=\frac{b}{2R} \quad \text{и} \quad \sin C=\frac{c}{2R},$$

то $a^3+b^3=c^3$, что и требовалось доказать.

701. Имеем

$$C=\pi-(A+B) \quad \text{и} \quad \sin C=\sin(A+B).$$

Следовательно,

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=$$

$$=\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)\times$$

$$\times\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=4\sin^2\frac{A+B}{2}\left(\cos^2\frac{A-B}{2}-\cos^2\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=2\sin^2\frac{A+B}{2}[1+\cos(A-B)-1-\cos(A+B)]=$$

$$=2\sin^2\frac{A+B}{2}2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin^2\frac{A+B}{2}.$$

Итак, заданная зависимость принимает вид

$$4\sin A\sin B\sin^2\frac{A+B}{2}=3\sin A\sin B,$$

или

$$4\sin^2\frac{A+B}{2}=3,$$

так как $\sin A\neq 0$, $\sin B\neq 0$. Далее

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad A+B=120^\circ,\quad C=60^\circ.$$

702. Имеем

$$\sin^5 x+\cos^5 x=(\sin x+\cos x)(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+$$

$$+\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x)=$$

$$=(\sin x+\cos x)[(\sin^4 x+\cos^4 x)-$$

$$-\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin^2 x\cos^2 x]. \quad (1)$$

Возведя в квадрат обе части равенства $\sin x+\cos x=a$, получим

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=a^2,$$

откуда

$$\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}.$$

Далее

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-$$

$$-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{(a^2-1)^2}{2}=\frac{1+2a^2-a^4}{2}.$$

Возвращаясь к равенству (1), получим

$$\sin^5 x+\cos^5 x=a\left[\frac{1+2a^2-a^4}{2}-\frac{a^2-1}{2}+\frac{(a^2-1)^2}{4}\right]=\frac{a}{4}(5-a^4).$$

703. Имеем

$$1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c=$$
$$=1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c+$$
$$+\cos^2 b\cos^2 c-\cos^2 b\cos^2 c=\sin^2 b-\cos^2 c\sin^2 b-$$
$$-(\cos a-\cos b\cos c)^2=\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2=$$
$$=[\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c][\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c]=$$
$$=[\cos a-\cos(b+c)][\cos(b-c)-\cos a]=$$
$$=4\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}=$$
$$=4\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c).$$

704. Из условия следует, что

$$2n\gamma=2n\pi-2n(\alpha+\beta),\quad n(\alpha+\beta)=n\pi-n\gamma.$$

Имеем

$$\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=$$
$$=2\sin n(\alpha+\beta)\cos n(\alpha-\beta)-\sin 2n(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin n(\alpha+\beta)\cos n(\alpha-\beta)-2\sin n(\alpha+\beta)\cos n(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin n(\alpha+\beta)[\cos n(\alpha-\beta)-\cos n(\alpha+\beta)]=$$
$$=4\sin n(\alpha+\beta)\sin n\alpha\sin n\beta=4\sin n\alpha\sin n\beta\sin(n\pi-n\gamma)=$$
$$=(-1)^{n+1}4\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma.$$

705. Преобразуем правую часть доказываемого равенства. Имеем

$$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=$$
$$=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 120^\circ)=2\sin\alpha\cos 2\alpha-2\sin\alpha\cos 120^\circ=$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}(\sin 3\alpha-\sin\alpha)+\sin\alpha=\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\sin 3\alpha.$$

706. Преобразуем правую часть доказываемого равенства. Имеем

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=$$
$$=4\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 2\alpha)=2\cos\alpha\cos 120^\circ+2\cos\alpha\cos 2\alpha=$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos\alpha=\cos 3\alpha.$$

707. Первое решение. Имеем

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=$$
$$=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}^2 60^\circ-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 60^\circ\operatorname{tg}^2\alpha}=$$
$$=\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}60^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}\alpha}\frac{\operatorname{tg}60^\circ-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}60^\circ\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha).$$

Второе решение. Так как (см. задачи 705 и 706)

$$\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha),$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha),$$

то

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{4 \sin \alpha \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha)}{4 \cos \alpha \cos (60^\circ - \alpha) \cos (60^\circ + \alpha)} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (60^\circ + \alpha).$$

708. Имеем

$$\sin 18^\circ = \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{\cos 54^\circ}{2 \cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\cos (3 \cdot 18^\circ)}{2 \cos 18^\circ} = \frac{4 \cos^3 18^\circ - 3 \cos 18^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{4 \cos^2 18^\circ - 3}{2} =$$

$$= \frac{4 - 4 \sin^2 18^\circ - 3}{2} = \frac{1 - 4 \sin^2 18^\circ}{2}.$$

Итак,

$$\sin 18^\circ = \frac{1 - 4 \sin^2 18^\circ}{2},$$

или

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0,$$

откуда

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Так как

$$\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16},$$

то

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

709. Первое решение. Имеем

$$(\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ) - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 63^\circ) =$$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} = \frac{\cos 27^\circ \cos 63^\circ - \cos 9^\circ \cos 81^\circ}{\cos 9^\circ \cos 27^\circ \cos 63^\circ \cos 81^\circ} =$$

$$= 2 \frac{2 \cos 27^\circ \cos 63^\circ - 2 \cos 9^\circ \cos 81^\circ}{2 \cos 9^\circ \cos 81^\circ \cdot 2 \cos 63^\circ \cos 27^\circ} =$$

$$= 2 \frac{\cos 90^\circ + \cos 36^\circ - \cos 90^\circ - \cos 72^\circ}{(\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 90^\circ + \cos 36^\circ)} =$$

$$= 2 \frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 72^\circ \cos 36^\circ} = 2 \frac{2 \sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4.$$

Второе решение. Имеем

$$\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ =$$

$$= (\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ) - (\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 27^\circ) =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ} =$$

$$= \frac{2(3 - 4 \sin^2 18^\circ) - 2}{\sin 54^\circ} = \frac{4(1 - 2 \sin^2 18^\circ)}{\sin 54^\circ} = \frac{4 \cos 36^\circ}{\cos 36^\circ} = 4.$$

710. Имеем

$$(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ) - (\cos 84^\circ + \cos 12^\circ) =$$

$$= 2 \cos 36^\circ \cos 12^\circ - 2 \cos 48^\circ \cos 36^\circ =$$

$$= 2 \cos 36^\circ (\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) = 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{8 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ \sin 30^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{4 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sin 30^\circ}{2 \cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 72^\circ \sin 30^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{2 \cos 18^\circ \cdot \frac{1}{2}}{2 \cos 18^\circ} = \frac{1}{2}.$$

711. Имеем

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ =$$

$$= (\sin 47^\circ - \sin 25^\circ) + (\sin 61^\circ - \sin 11^\circ) =$$

$$= 2 \cos 36^\circ \sin 11^\circ + 2 \cos 36^\circ \sin 25^\circ =$$

$$= 2 \cos 36^\circ (\sin 25^\circ + \sin 11^\circ) = 4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ \cos 7^\circ =$$

$$= \frac{4 \cos 36^\circ \cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{2 \cos 36^\circ \sin 36^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ.$$

712. Имеем

$$\frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(2 \sin 10^\circ \sin 70^\circ)}{2 \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 + 2(\cos 80^\circ - \cos 60^\circ)}{2 \sin 10^\circ} = \frac{1 + 2\left(\cos 80^\circ - \frac{1}{2}\right)}{2 \sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{2 \cos 80^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1.$$

713. Имеем

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ =$$

$$= \sqrt{3} \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} =$$

$$= \sqrt{3} \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \, 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \, 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \sin 10^\circ} =$$

$$= 8 \sqrt{3} \cos 10^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ = 8 \sqrt{3} \cos 10^\circ \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{2} =$$

$$= 4 \sqrt{3} \left(\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 10^\circ \right) =$$

$$= 4 \sqrt{3} \left(\frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} - \frac{1}{2} \cos 10^\circ \right) =$$

$$= 4 \sqrt{3} \frac{1}{2} \cos 30^\circ = 4 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

714. Первое решение. Имеем

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \cos 20^\circ \frac{\cos 120^\circ + \cos 40^\circ}{2} =$$

$$= \cos 20^\circ \frac{-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ}{2} = -\frac{1}{4} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} (-2 \cos 20^\circ + 1 + 2 \cos 20^\circ) = \frac{1}{8}.$$

Второе решение. Имеем

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ =$$

$$= \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 160^\circ} = \frac{1}{8}.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

715. Первое решение. Это уравнение распадается на два уравнения.

1) $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Так как $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}(2k+1)$ не существует ни при каком целом значении k, то множество корней $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ не является решением заданного уравнения.

2) $\operatorname{tg} 3x=0$, откуда $x=\frac{\pi k}{3}$.

Поскольку $\cos\frac{\pi k}{3}$ существует при любом целом k, то решением уравнения является

$$x=\frac{\pi k}{3}.$$

Второе решение. Поскольку $\operatorname{tg} 3\alpha=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}$ и $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, то заданное уравнение принимает вид

$$\cos x\,\frac{\sin 3x}{4\cos^3 x-3\cos x}=0,$$

или

$$\frac{\sin 3x}{4\cos^2 x-3}=0.$$

Если $4\cos^2 x-3\neq 0$, т. е. $\cos x\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$x\neq\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, \tag{1}$$

то $\sin 3x=0$ и

$$x=\frac{\pi k}{3}. \tag{2}$$

Заметим, что соотношение (1) не исключает корней формулы (2).

Ответ. $x=\frac{\pi k}{3}$.

716. Это уравнение разбивается на два уравнения:

$$\operatorname{tg} 3x = 0 \qquad (1)$$

и

$$\operatorname{tg} 4x = 0. \qquad (2)$$

Из (1) имеем $x = \frac{\pi k}{3}$, а из (2) $x = \frac{\pi k}{4}$. Так как $\operatorname{tg} \frac{4\pi k}{3}$ существует при любом k, то множество $x = \frac{\pi k}{3}$ является решением заданного уравнения.

Поскольку $\operatorname{tg} \frac{3\pi k}{4}$ существует только при всех k, кратных четырем ($k = 4m$), и всех нечетных k ($k = 2m + 1$), но не существует при четных k, не кратных четырем, то надо из совокупности $x = \frac{\pi k}{4}$ исключить значения x, получающиеся при $k = 2(2m + 1)$.

Итак, имеем множества корней

$$x = \pi m \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4}(2m + 1).$$

Заметим, что числа $x = \pi m$ содержатся в множестве корней $\frac{\pi k}{3}$ при значениях k, кратных трем.

Ответ. $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

717. Заданное уравнение равносильно системе

$$\sin x = 0, \quad \operatorname{tg} x \neq 0.$$

Решая уравнение $\sin x = 0$, получаем $x = \pi k$. Но $\operatorname{tg} \pi k = 0$ при любом целом k, поэтому заданное уравнение не имеет решений.

718. Заданное уравнение равносильно системе

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad \sin 3x \neq 0.$$

Решая $\operatorname{tg} x = 0$, получаем $x = \pi k$. Но любое значение x из множества $x = \pi k$ превращает $\sin 3x$ в нуль, следовательно, заданное уравнение не имеет решений.

719. Заданное уравнение равносильно системе

$$\operatorname{tg} 3x = 0, \quad \sin x \neq 0.$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} 3x = 0$, получаем $x = \frac{\pi k}{3}$. Но $\sin \frac{\pi k}{3}$ обращается в нуль при k, кратном трем, поэтому надо из множества $x = \frac{\pi k}{3}$ исключить те значения x, которые получаются при k, кратном трем.

Ответ. $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$.

720. Левая часть уравнения может быть равна единице только тогда, когда

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$3x - x = \pi k,$$

или

$$x = \frac{\pi}{2} k.$$

Но так как при k четном $\operatorname{tg} x$ превращается в нуль, а при k нечетном $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, то поэтому заданное уравнение не имеет решений.

721. Первое решение. Имеем

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x - (1+\sqrt{5})\operatorname{tg} x = 0,$$

откуда

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} - \frac{(1+\sqrt{5})\sin x}{\cos x} = 0,$$

или

$$\sin x \left[\frac{2\cos x - (1+\sqrt{5})\cos 3x}{\cos x \cos 3x}\right] = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin x = 0 \tag{1}$$

и

$$2\cos x - (1+\sqrt{5})\cos 3x = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) имеем $x_1 = \pi k$.

Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то уравнение (2) принимает вид

$$\cos x\,[2 - (1+\sqrt{5})(4\cos^2 x - 3)] = 0.$$

Поскольку при $\cos x = 0$ функция $\operatorname{tg} x$ теряет смысл, то последнее уравнение равносильно следующему:

$$4(1+\sqrt{5})\cos^2 x = 5 + 3\sqrt{5},$$

или

$$\frac{4(1+\sqrt{5})(1+\cos 2x)}{2} = 5 + 3\sqrt{5},$$

откуда

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Следовательно,

$$2x = \pm \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x_2 = \pm 0{,}5 \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \pi k.$$

Так как

$$\arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\pi}{5},$$

то

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{10} + \pi k.$$

Второе решение. Так как

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x},$$

то заданное уравнение можно переписать в таком виде:

$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} - (2 + \sqrt{5}) \operatorname{tg} x = 0,$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} (3 - \operatorname{tg}^2 x - 2 - \sqrt{5} + 6 \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{5} \cdot 3 \operatorname{tg}^2 x) = 0. \quad (1)$$

Должно быть

$$1 - 3 \operatorname{tg}^2 x \neq 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

т. е.

$$x \neq \pm \frac{\pi}{6} + \pi k. \quad (2)$$

Уравнение (1) распадается на два уравнения:

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad (3)$$

и

$$(5 + 3\sqrt{5}) \operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{5} - 1) = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует

$$x_1 = \pi k, \quad (5)$$

из (4) имеем

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5},$$

откуда

$$x_2 = \pi k \pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}.$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5},$$

то

$$x_2 = \pi k \pm \frac{\pi}{10}. \quad (6)$$

Отметим, что условие (2) не исключает корней формул (5) и (6).

Отв. πk, $\pi k \pm \frac{\pi}{10}$.

722. Должно быть $\cos x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, но так как

$$\left|\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right| > 1 \quad \text{и} \quad \left|-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right| > 1$$

при любом значении k, то уравнение не имеет решений.

723. Имеем

$$\cos x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Это равенство возможно только при $k = 0$, так как

$$|\cos x| \leqslant 1.$$

Итак,

$$\cos x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\pm \arccos \frac{\pi}{6} + \pi n$.

724. Первое решение. Если $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{3}$, то должны иметь место равенства

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2\pi k \tag{1}$$

и

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2\pi n, \tag{2}$$

откуда

$$x = \frac{12\pi k}{5} \quad \text{и} \quad x = 12\pi n.$$

Очевидно, что ни при каких целых значениях k и n не будет иметь места неравенство $0 < x < \pi$, что доказывает утверждение задачи.

Второе решение. Так как x—угол треугольника, то должно быть

$$0 < x < \pi.$$

Следовательно,

$$0 < \frac{x}{3} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Но так как в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ косинус монотонно убывает, то должно быть

$$\cos \frac{x}{2} < \cos \frac{x}{3},$$

что противоречит равенству $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{3}$.

725. Первое решение. Действительно, так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, то произведение двух синусов может равняться единице только в одном из следующих двух случаев:

1) $\sin 2x=1$ и $\sin 6x=1$;
2) $\sin 2x=-1$ и $\sin 6x=-1$.

Рассмотрим случай 1). Получаем

$$x=\frac{(4k+1)\pi}{4} \text{ и } x=\frac{(4l+1)\pi}{12}.$$

Сравнивая найденные значения x, получим

$$\frac{(4k+1)\pi}{4}=\frac{(4l+1)\pi}{12},$$

откуда

$$6k=2l-1.$$

Но четное число не может равняться нечетному, и, следовательно, случай 1) невозможен. Легко показать, что и случай 2) невозможен. (Полагая $x=-z$, случай 2) сразу сводим к случаю 1).)

Второе решение. Имеем

$$1-\sin 2x\sin 6x=0,$$
$$1-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)=0,$$
$$1-\cos 4x+1+\cos 8x=0,$$
$$2\sin^2 2x+2\cos^2 4x=0.$$

Последнее возможно только в том случае, когда $\sin 2x=0$ и $\cos 4x=0$ одновременно. Так как из полученных уравнений находим, что $x=\frac{k\pi}{2}$ и $x=\frac{(2l+1)\pi}{8}$, то

$$\frac{k\pi}{2}=\frac{(2l+1)\pi}{8}, \quad 4k=2l+1.$$

Но это невозможно, так как четное число $4k$ не может равняться нечетному $2l+1$.

726. Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2mx+\cos\frac{\pi}{3}\right)=a,$$

или

$$\cos 2mx=2a-\frac{1}{2}=\frac{4a-1}{2}.$$

Должно быть

$$-1\leqslant\frac{4a-1}{2}\leqslant 1,$$
$$-2\leqslant 4a-1\leqslant 2,$$
$$-1\leqslant 4a\leqslant 3.$$

Ответ. $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$.

727. Имеем

$$\operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{tg}(x+45^\circ)=\operatorname{tg}(x-45^\circ)\operatorname{ctg}(45^\circ-x)=-1.$$

При этом предполагается, что $x\neq 45^\circ(2n+1)$, ибо тогда один из сомножителей обращается в нуль, а другой — не существует. Знаменатель правой части преобразуется к виду

$$-\frac{\cos x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{2\cos x}{\sin x}=-2\operatorname{ctg}x;$$

при этом предполагается, что $x\neq 180^\circ n$, ибо при $x=180^\circ n$ либо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, либо $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ теряет смысл. Получаем уравнение

$$-\operatorname{tg}x=-\frac{4\cos^2 x}{2\operatorname{ctg}x},$$

которое (в предположении, что $x\neq 180^\circ n$) приводится к виду $\cos 2x=0$. Последнее уравнение имеет решение $x=45^\circ(2n+1)$, но оно не соответствует сделанным предположениям. Итак, уравнение не имеет решений.

728. Имеем

$$\sin x\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}},$$

или

$$2\sin x\cos\frac{x}{2}=\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$2\sin x\cos\frac{x}{2}\pm\cos\frac{x}{2}=0,$$

т. е.

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin x\pm\frac{1}{2}\right)=0,$$

откуда

1) $\cos\frac{x}{2}=0$ и $x_1=\pi+2\pi k=\pi(2k+1)$,

2) $\sin x=\pm\frac{1}{2}$ и $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$.

Легко убедиться, что множество корней $x_1=\pi(2k+1)$ удовлетворяет заданному уравнению при любом целом k.

Но среди множества $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ имеются посторонние корни. Действительно, пусть $k=2$, тогда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi$ и $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{12}+\pi$. В этом случае имеем

$$\sin x=\frac{1}{2}>0,\quad \cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{12}<0,$$

следовательно, левая часть уравнения $\sin x \cos\frac{x}{2} < 0$, а правая часть неотрицательна, так как радикал берется в арифметическом смысле.

Итак, в формуле

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$$

надо исключить те значения x, при которых $\sin x$ и $\cos\frac{x}{2}$ имеют противоположные знаки. (Случай $\sin x = 0$ невозможен, а случай $\cos\frac{x}{2} = 0$ ранее рассмотрен и множество корней этого уравнения представлено формулой $x_1 = \pi(2k+1)$.)

Так как $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, то левую часть уравнения можно переписать так:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}.$$

Поскольку $2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$ должно быть положительным, а $\cos^2\frac{x}{2} > 0$, то должно быть $\sin\frac{x}{2} > 0$, откуда

$$2\pi k < \frac{x}{2} < \pi + 2\pi k$$

и

$$4\pi k < x < 2\pi + 4\pi k. \qquad (1)$$

Легко установить, что из множества корней $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ только подмножества

$$\frac{\pi}{6} + 4\pi k, \quad \frac{5\pi}{6} + 4\pi k, \quad \frac{7\pi}{6} + 4\pi k, \quad \frac{11\pi}{6} + 4\pi k$$

удовлетворяют условию (1).

Отв. $\pi(2k+1)$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 4\pi k$, $\frac{7\pi}{6} + 4\pi k$, $\frac{11\pi}{6} + 4\pi k$.

729. Пусть положительное число d — разность арифметической прогрессии, тогда

$$b = a + d, \quad m = a + 2d, \quad n = a + 3d.$$

Перепишем заданное уравнение так:

$$\sin ax \sin(a+d)x = \sin(a+2d)x \sin(a+3d)x,$$

или

$$0{,}5[\cos dx - \cos(2a+d)x] = 0{,}5[\cos dx - \cos(2a+5d)x],$$

или

$$\cos(2a+d)x = \cos(2a+5d)x.$$

Отсюда следует, что

$$(2a+d)\,x+(2a+5d)\,x=2\pi k \qquad (1)$$

и

$$(2a+5d)\,x-(2a+d)\,x=2\pi k. \qquad (2)$$

Из (1) имеем

$$x_1=\frac{\pi k}{2a+3d}=\frac{\pi k}{b+m},$$

а из (2)

$$x_2=\frac{\pi k}{2d}=\frac{\pi k}{m-b}.$$

Отв. $\frac{\pi k}{b+m}$, $\frac{\pi k}{m-b}$.

730. Ясно, что $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ не равны нулю, а x и y различны.

Перепишем заданную систему так:

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y,\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos y.\end{cases}$$

После возведения обеих частей уравнений в квадрат получим

$$\begin{cases}\sin^2 x=2\sin^2 y,\\ \cos^2 x=\dfrac{2}{3}\cos^2 y.\end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получаем

$$1=2\sin^2 y+\frac{2}{3}\cos^2 y,$$

или

$$1=2(1-\cos^2 y)+\frac{2}{3}\cos^2 y.$$

Следовательно,

$$\cos^2 y=\frac{3}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{1+\cos 2y}{2}=\frac{3}{4},$$

откуда $\cos 2y=\frac{1}{2}$ и

$$2y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, \quad y=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m.$$

Подставляя значение y во второе уравнение системы, получаем

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k.$$

Из данной системы видно, что $\sin x$ и $\sin y$ имеют одинаковые знаки и $\cos x$ и $\cos y$ также имеют одинаковые знаки.

Нетрудно убедиться, что это возможно лишь тогда, когда концы дуг x и y лежат в одной четверти.

Отв. $x_1=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $y_1=\frac{\pi}{6}+2\pi m$; $x_2=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $y_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$; $x_3=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $y_3=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$; $x_4=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $y_4=-\frac{\pi}{6}+2\pi m$.

731. Так как

$$\sin x \sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2},$$

то второе уравнение можно записать так:

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2m.$$

Но $x+y=\alpha$ (из первого уравнения), следовательно,

$$\cos(x-y)=2m+\cos\alpha,$$

откуда, если $|2m+\cos\alpha|\leqslant 1$,

$$x-y=2\pi n\pm\arccos(2m+\cos\alpha).$$

Таким образом, заданная система распадается на две:

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=2\pi n+\arccos(2m+\cos\alpha) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=2\pi n-\arccos(2m+\cos\alpha). \end{cases}$$

Дальнейшее очевидно.

Отв. $x_1=\pi n+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha)$,

$y_1=-\pi n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha)$,

$x_2=\pi n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha)$,

$y_2=-\pi n+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos(2m+\cos\alpha)$.

732. Представим заданную систему так:

$$\begin{cases} \sin^3 x\cos x=\frac{1}{2}\sin y\cos x, \\ \cos^3 x\sin x=\frac{1}{2}\sin x\cos y. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)=\frac{1}{2}(\sin x\cos y+\cos x\sin y),$$

$$2\sin x\cos x=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\sin 2x=\sin(x+y).$$

Так как x и y — острые углы, то

$$2x = x + y \quad \text{и} \quad x = y.$$

Далее мы имеем

$$\sin^3 x = \frac{1}{2} \sin x.$$

Положительный корень этого уравнения

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{4},$$

а, следовательно, и $y = \frac{\pi}{4}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$.

733. Первое решение. Умножим обе части уравнения на $(\sin x + \cos x)$, тогда получим

$$-\cos 2x = \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos^2 x,$$

или

$$\sin^2 2x + \sin 2x\,(1 + \cos 2x) + \cos 2x = 0,$$

или

$$(\sin 2x + 1)(\sin 2x + \cos 2x) = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

1) $\sin 2x = -1$, откуда $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$,

2) $\sin 2x = -\cos 2x$, или $\operatorname{tg} 2x = -1$, откуда $x_2 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n$.

Замечание. От умножения на $(\sin x + \cos x)$ мы не приобрели лишних корней, так как если $\cos x + \sin x = 0$, то $x = -45° + 180°n$, но эта группа корней является корнями и исходного уравнения.

Второе решение. Перепишем заданное уравнение так:

$$\sin x - \cos x = 2 \sin 2x \cos x,$$

$$\sin x - \cos x = \sin 3x + \sin x,$$

откуда

$$\cos x = -\sin 3x,$$

или

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right). \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - x = 2\pi n \quad \text{или} \quad \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) + x = 2\pi n.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n$.

734. Первое решение. Так как

$$\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}=2\cos x\cos\frac{x}{2},$$

то

$$\cos\frac{3x}{2}=2\cos x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.$$

Поэтому заданное уравнение можно представить в виде

$$2\cos x-\left(2\cos x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)-1=0,$$

$$2\cos x-1-\cos\frac{x}{2}(2\cos x-1)=0,$$

или

$$(2\cos x-1)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=0,$$

откуда

$$\cos x=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\cos\frac{x}{2}=1,$$

а значит,

$$x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad x_2=4\pi k.$$

Второе решение. Заданное уравнение перепишем так:

$$2\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-\left(4\cos^3\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}\right)=1,$$

$$3+4\cos^3\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}=0,$$

$$\left(\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(4\cos^2\frac{x}{2}-3\right)=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) распадается на два уравнения:

$$\cos\frac{x}{2}=1 \qquad (2)$$

и

$$4\cos^2\frac{x}{2}=3,\quad\text{или}\quad 2(1+\cos x)=3. \qquad (3)$$

Отв. $x_1=4\pi k,\quad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$

735. Так как

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

то заданное уравнение принимает вид

$$2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x+1),$$

или

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

или

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

что невозможно ни при каком значении x, т. е. уравнение не имеет решений.

736. Первое решение. Очевидно, что уравнение $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x=1$ удовлетворяется, если x принимает значения, кратные $\frac{\pi}{2}$, т. е. если $x=\frac{\pi}{2}k$ (k—целое число). Покажем, что заданное уравнение не имеет других корней.

Пусть $x_0\neq k\frac{\pi}{2}$, тогда

$$\sin^2 x_0<1 \quad \text{и} \quad \cos^2 x_0<1.$$

Отсюда следует, что при $n>1$ будет

$$\sin^{2n}x_0<\sin^2 x_0 \quad \text{и} \quad \cos^{2n}x_0<\cos^2 x_0$$

и, значит,

$$\sin^{2n}x_0+\cos^{2n}x_0<\sin^2 x_0+\cos^2 x_0=1,$$

т. е. $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x=1$ только при $x=\frac{\pi}{2}k$.

Второе решение. При $n=1$ уравнение превращается в тождество. Если $n>1$, то из тождества

$$1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^n=\sin^{2n}x+$$
$$+C_n^1\sin^{2(n-1)}x\cos^2 x+\ldots+C_n^{n-1}\sin^2 x\cos^{2(n-1)}x+\cos^{2n}x,$$

учитывая заданное уравнение, получаем

$$C_n^1\sin^{2(n-1)}x\cos^2 x+\ldots+C_n^{n-1}\sin^2 x\cos^{2(n-1)}x=0.$$

Следовательно, либо $\sin^2 x=0$, либо $\cos^2 x=0$.

Отв. $x=\frac{\pi}{2}k$.

737. Имеем

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin 2x+a=0,$$
$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\sin 2x+a=0,$$
$$\sin^2 2x-2\sin 2x-2(a+1)=0,$$

откуда

$$\sin 2x=1\pm\sqrt{2a+3}.$$

Условием действительности корней является

$$2a+3\geqslant 0, \text{ или } a\geqslant -\frac{3}{2}.$$

Так как $|\sin 2x|\leqslant 1$, то $|1\pm\sqrt{2a+3}|\leqslant 1$.

Рассмотрим отдельно последние соотношения:

1) $|1-\sqrt{2a+3}|\leqslant 1$, отсюда

$$-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

При этом условии

$$\sin 2x=1-\sqrt{2a+3}$$

и

$$x=\frac{\pi k}{2}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(1-\sqrt{2a+3}). \tag{2}$$

2) $|1+\sqrt{2a+3}|\leqslant 1$; но так как, с другой стороны, $1+\sqrt{2a+3}\geqslant 1$, то $\sqrt{2a+3}=0$, т. е. $a=-\frac{3}{2}$. Поэтому в этом случае

$$\sin 2x=1. \tag{3}$$

Поскольку $a=-\frac{3}{2}$ входит в (1), то решения уравнения (3) входят в решения (2).

Ответ. $x=\frac{\pi k}{2}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin(1-\sqrt{2a+3})$, где $-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

738. Имеем

$$2\cos^2(x+\alpha)+2\cos^2(x-\alpha)=2\sin 2\alpha,$$

или

$$\cos(2x+2\alpha)+\cos(2x-2\alpha)+2=2\sin 2\alpha,$$

или

$$2\cos 2x\cos 2\alpha=2(\sin 2\alpha-1).$$

Если $\cos 2\alpha\neq 0$, т. е. если $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{4}$, то из последнего уравнения находим

$$\cos 2x=\frac{\sin 2\alpha-1}{\cos 2\alpha}=\frac{1-\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Итак, мы получили

$$\cos 2x = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1)$$

Поскольку $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, то $-1 \leqslant \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$, или

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \operatorname{tg}\frac{\pi}{4},$$

откуда

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Но так как по условию

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

то

$$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Из (1) находим

$$2x = \pm \arccos\left[\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 2\pi k$$

и

$$x = \pm 0{,}5 \arccos\left[\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \pi k,$$

где

$$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4}.$$

Проверкой устанавливаем, что исходное уравнение при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ превращается в тождество, а при $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ противоречиво. Учитывая ограничения для α, заключаем, что при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ исходное уравнение не имеет решения.

739. Имеем

$$\frac{1}{2}\left[\cos(b-c)x - \cos(b+c)x\right] = \frac{1-\cos(b+c)x}{2} + a,$$

или

$$\cos(b-c)x - \cos(b+c)x = 1 - \cos(b+c)x + 2a,$$

или

$$\cos(b-c)\,x=2a+1.$$

Должно быть

$$-1\leqslant 2a+1\leqslant 1,$$

или

$$-2\leqslant 2a\leqslant 0,$$

откуда

$$-1\leqslant a\leqslant 0.$$

740. Перепишем заданное уравнение так:

$$\sin(2x+x)+\sin 2x=m\sin x,$$
$$\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x+\sin 2x-m\sin x=0,$$
$$\sin x\,(2\cos^2 x+\cos 2x+2\cos x-m)=0,$$
$$\sin x\,(4\cos^2 x+2\cos x-m-1)=0. \qquad (1)$$

Так как квадратный трехчлен, заключенный в скобках, имеет корни

$$\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4} \text{ и } \frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4},$$

то уравнение (1) распадается на три:

$$\sin x=0, \qquad (2)$$

$$\cos x=\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}, \qquad (3)$$

$$\cos x=\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}. \qquad (4)$$

Из (2) получаем $x=\pi k$.

Условием действительности уравнений (3) и (4) является неравенство

$$4m+5\geqslant 0, \text{ т. е. } m\geqslant -\frac{5}{4}.$$

Для того чтобы уравнение (3) имело решение, еще необходимо, чтобы

$$\left|\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}\right|\leqslant 1, \qquad (5)$$

а для того чтобы уравнение (4) имело решение, необходимо, чтобы

$$\left|\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}\right|\leqslant 1. \qquad (6)$$

Из (5) следует

$$|-1+\sqrt{4m+5}|\leqslant 4,$$

или

$$-4\leqslant -1+\sqrt{4m+5}\leqslant 4,$$

или

$$-3 \leqslant \sqrt{4m+5} \leqslant 5,$$

откуда

$$m \leqslant 5.$$

Из (6) имеем

$$-4 \leqslant -1-\sqrt{4m+5} \leqslant 4,$$

откуда

$$m \leqslant 1.$$

Итак, $x_1 = \pi k$ при любом m;

$$x_2 = 2\pi k \pm \arccos \frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4},$$

если

$$-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 5;$$

$$x_3 = 2\pi k \pm \arccos \frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4},$$

если

$$-\frac{5}{4} \leqslant m \leqslant 1.$$

741. Так как

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \text{ и } \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

то данное уравнение принимает вид

$$\operatorname{tg} x - \frac{9 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x + \cos^2 x}{9 \cos^2 x + 6 \sin x \cos x + \sin^2 x} = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} x - \frac{(3 \sin x + \cos x)^2}{(3 \cos x + \sin x)^2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x - \frac{\left(3 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}\right)^2}{\left(3 \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} x - \left(\frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{3 + \operatorname{tg} x}\right)^2 = 0,$$

$$\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

$$(\operatorname{tg} x - 1)^3 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} x = 1$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi k$.

742. Имеем

$$\sin x-\frac{5(1-\sin^2x)^2-20(1-\sin^2x)+16}{(1-\sin^2x)^2-12(1-\sin^2x)+16}=0,$$

или

$$\sin x-\frac{5\sin^4x+10\sin^2x+1}{\sin^4x+10\sin^2x+5}=0.$$

После приведения к общему знаменателю, получим

$$\sin^5x-5\sin^4x+10\sin^3x-10\sin^2x+5\sin x-1=0,$$

или

$$(\sin x-1)^5=0,$$

а следовательно, $\sin x=1$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

743. Заданное уравнение перепишем так:

$$\sin^4x-3=\sin^23x-\sin x. \qquad (1)$$

Очевидно, что

$$-3\leqslant\sin^4x-3\leqslant-2$$

и

$$-1\leqslant\sin^23x-\sin x\leqslant2.$$

Итак, левая часть уравнения (1) определена на сегменте $[-3,-2]$, а правая — на сегменте $[-1, 2]$. Так как эти два сегмента не пересекаются, то уравнение не имеет решений.

744. Имеем

$$(\sin 2x+3)\sin^2x(\sin^2x-1)+1=0.$$

Проведем последовательно тождественные преобразования:

$$-(\sin 2x+3)\sin^2x\cos^2x+1=0,$$
$$-(\sin 2x+3)\,4\sin^2x\cos^2x+4=0,$$
$$-\sin^22x(\sin 2x+3)+4=0,$$
$$\sin^32x+3\sin^22x-4=0,$$

или

$$(\sin 2x-1)(\sin 2x+2)^2=0.$$

Так как $(\sin 2x+2)^2>0$ при любом значении x, то $\sin 2x-1=0$, т. е. $\sin 2x=1$.

Отв. $x=\frac{\pi}{4}(4n+1)$.

745. Перепишем данное уравнение так:

$$4\sin^43x+5=3\cos x. \qquad (1)$$

Должно быть

$$5\leqslant4\sin^43x+5\leqslant9, \text{ а } -3\leqslant3\cos x\leqslant3.$$

Эти неравенства показывают, что левая и правая части уравнения (1) не могут иметь одинаковых значений ни при каких x, поэтому данное уравнение не имеет решений.

746. Перепишем заданное уравнение так:

$$(\sin^2x)^3+(\cos^2x)^3=a.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=$$
$$=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Итак,

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=a,$$

откуда

$$\sin^2 2x=\frac{4(1-a)}{3},$$

или

$$\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{4(1-a)}{3}.$$

Отсюда

$$\cos 4x=\frac{8a-5}{3}. \qquad (1)$$

Необходимым и достаточным условием существования решения заданного уравнения является неравенство

$$-1\leqslant\frac{8a-5}{3}\leqslant 1,$$

откуда

$$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 1. \qquad (2)$$

При соблюдении условия (2) из (1) получаем

$$4x=2\pi k\pm\arccos\frac{8a-5}{3}$$

и

$$x=\frac{\pi k}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}.$$

Отв. $x=\frac{\pi k}{2}\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}$. В частности, если $a=1$, то $x=\frac{\pi k}{2}$, а если $a=\frac{1}{4}$, то $x=\frac{\pi k}{2}\pm\frac{\pi}{4}$.

747. Поскольку

$$\cos^6 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)$$

и

$$\cos 6x=4\cos^3 2x-3\cos 2x,$$

то заданное уравнение приводится к виду

$$4\cos^2 2x+5\cos 2x+1=0,$$

откуда

$$\cos 2x = -1 \qquad (1)$$

и

$$\cos 2x = -\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Отв. $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi =$

$$= \pm\frac{1}{2}\left[\pi - \arccos\frac{1}{4}\right] + k\pi.$$

748. Учитывая, что

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$$

легко приводим заданное уравнение к виду

$$(\sin x - \cos x)[\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x) - 1] = 0.$$

Отсюда следует, что либо

$$\sin x - \cos x = 0, \qquad (1)$$

либо

$$\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x) - 1 = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) получаем

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Положим в уравнении (2) $\sin x \cos x = y$ и преобразуем его, пользуясь тем, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x,$$

а

$$\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \sin x \cos x.$$

Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$y^3 - y^2 - y + 1 = 0, \qquad (3)$$

или (после разложения левой части на множители)

$$(y-1)^2(y+1) = 0.$$

Если $y = \pm 1$, т. е. $\sin x \cos x = \pm 1$, то $\sin 2x = \pm 2$, что невозможно.

Итак, уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, корни исходного уравнения суть корни уравнения (1).

Отв. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

749. Первое решение. Произведем над уравнением последовательно тождественные преобразования:

$$16\sin^5 x - 4\sin x = \sin 5x + \sin x,$$

$$4\sin x (4\sin^4 x - 1) = 2\sin 3x \cos 2x,$$

$$2\sin x [(1-\cos 2x)^2 - 1] = (3\sin x - 4\sin^3 x)\cos 2x,$$

$$2\sin x (\cos^2 2x - 2\cos 2x) - \sin x (3 - 4\sin^2 x)\cos 2x = 0,$$

$$\sin x [2\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3\cos 2x + 2\cos 2x (1 - \cos 2x)] = 0,$$

$$\sin x (2\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3\cos 2x + 2\cos 2x - 2\cos^2 2x) = 0,$$

$$-5\sin x \cos 2x = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) разбивается на два уравнения:

1) $\sin x = 0$, откуда $x_1 = \pi k$;

2) $\cos 2x = 0$, откуда $x_2 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.

Второе решение. Поскольку

$$(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x = \cos^5 x + 5i \sin x \cos^4 x - \\ - 10 \sin^2 x \cos^3 x - 10i \sin^3 x \cos^2 x + 5 \sin^4 x \cos x + i \sin^5 x,$$

то

$$\sin 5x = \sin^5 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + 5 \sin x \cos^4 x = \\ = \sin^5 x - 10 \sin^3 x (1 - \sin^2 x) + 5 \sin x (1 - \sin^2 x)^2.$$

Итак,

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x.$$

Подставив полученное выражение $\sin 5x$ в заданное уравнение, получим

$$16 \sin^5 x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 10 \sin x,$$

или

$$20 \sin^3 x - 10 \sin x = 0,$$

или

$$\sin x (2 \sin^2 x - 1) = 0,$$

или

$$\sin x \cos 2x = 0,$$

откуда

$$\sin x = 0, \quad (1)$$
$$\cos 2x = 0. \quad (2)$$

Отв. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$.

750. Имеем

$$(\sin^2 x)^5 + (\cos^2 x)^5 = \frac{29}{16} \cos^4 2x,$$

или

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{29}{16} \cos^4 2x,$$

или

$$(1 - \cos 2x)^5 + (1 + \cos 2x)^5 = 58 \cos^4 2x.$$

После преобразований получаем

$$24 \cos^4 2x - 10 \cos^2 2x - 1 = 0,$$

откуда

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2},$$

или

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2},$$

или

$$\cos 4x = 0.$$

Отв. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k$.

751. Имеем

$$x^2=\pi k,$$

откуда

$$x=\pm\sqrt{\pi k},\text{ где } k=0,+1,+2,+3\ldots,$$

или

$$x=\pm\sqrt{\pi|k|},\text{ где } k\text{—любое целое.}$$

752. Имеем

$$x^2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

Если $k=0$, то $x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, если $k=1, 2, 3, \ldots$, то $x=\pm\sqrt{2\pi k\pm\frac{\pi}{3}}$.

753. Должно быть

$$\sqrt{49-x^2}=2\pi k \text{ или } 49-x^2=4\pi^2k^2,$$

откуда

$$x^2=49-4\pi^2k^2.$$

Последнее равенство возможно только при $k=0$ и при $k=1$.

Отв. $x_{1,2}=\pm 7$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{49-4\pi^2}$.

754. Действительно,

$$\operatorname{tg}\left(x^2+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)\operatorname{tg}\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-\operatorname{ctg}\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)=-1,$$

а по условию правая часть уравнения равна 2, поэтому уравнение не имеет решений.

755. Перепишем заданное уравнение так:

$$\operatorname{tg}(x^2-x)=\operatorname{tg} 2.$$

Имеем

$$x^2-x-2=\pi k \text{ или } x^2-x-(2+\pi k)=0,$$

откуда

$$x=\frac{1\pm\sqrt{4\pi k+9}}{2}.$$

Условием действительности корней является неравенство

$$4\pi k+9\geqslant 0, \text{ или } k\geqslant-\frac{9}{4\pi}.$$

Но так как k должно быть целым числом, то $k>-1$.

Отв. $x=\frac{1\pm\sqrt{4\pi k+9}}{2}$, где $k=0, +1, +2, +3, \ldots$

756. Преобразуем тождественно заданное уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2}+\frac{1-\cos 4x^2}{2}=\frac{1-\cos 6x^2}{2}+\frac{1-\cos 8x^2}{2},$$

$$\cos 2x^2+\cos 4x^2=\cos 6x^2+\cos 8x^2,$$

$$\cos 3x^2\cos x^2-\cos 7x^2\cos x^2=0,$$

$$\cos x^2(\cos 3x^2-\cos 7x^2)=0,$$

$$\cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) разбивается на три уравнения:

1) $\cos x^2=0$, откуда $x_1^2=\frac{2k+1}{2}\pi$;

2) $\sin 2x^2=0$, откуда $x_2^2=\frac{\pi k}{2}$;

3) $\sin 5x^2=0$, откуда $x_3^2=\frac{\pi k}{5}$.

Так как $x^2\geqslant 0$, то $k=0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots$
Поскольку при $k=2n+1$

$$x_2^2=\frac{2n+1}{2}\pi=x_1^2,$$

а x_2^2 при $k=2n$ дает те же значения, что и x_3^2 при $k=5n$, то окончательно имеем

$$x=\pm\sqrt{\frac{2k+1}{2}\pi}\ \text{ и }\ x=\pm\sqrt{\frac{\pi k}{5}}.$$

757. Из заданного уравнения следует, что $\frac{2}{\sin 2x}=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$, откуда $\sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $2x=\pi n\pm\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}n\pm\frac{\pi}{6}$.

758. Первое решение. Так как $-3\leqslant 3\cos x\leqslant 3$, а $-5\leqslant|\cos x|-5\leqslant -4$, то левая и правая части заданного уравнения не могут быть равны ни при каком значении x.

Второе решение. Заданное уравнение распадается на два уравнения:

1) $3\cos x=\cos x-5$, если $\cos x\geqslant 0$; отсюда $\cos x=-\frac{5}{2}$ и, значит, решений нет, так как $\left|-\frac{5}{2}\right|>1$;

2) $3\cos x=-\cos x-5$, если $\cos x<0$; отсюда $\cos x=-\frac{5}{4}$; в этом случае решений также нет, так как $\left|-\frac{5}{4}\right|>1$.

Итак, заданное уравнение не имеет решений.

759. Поскольку $\cos|x|=\cos x$ и $\operatorname{tg}^2|x|=\operatorname{tg}^2 x$, то заданное уравнение можно переписать так:

$$\operatorname{tg}^2|x|=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|},$$

или

$$\frac{\sin^2|x|}{\cos^2|x|}=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|},$$

или

$$\frac{1-\cos^2|x|}{1-\sin^2|x|}=\frac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}.$$

Умножив обе части этого уравнения на $1-\sin|x|\neq 0$, получим

$$\frac{1-\cos^2|x|}{1+\sin|x|}=1-\cos|x|,$$

откуда

$$(1-\cos|x|)(\cos|x|-\sin|x|)=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$1-\cos|x|=0, \text{ или } \cos x=1; \quad (1)$$

$$\cos|x|-\sin|x|=0, \text{ или } \operatorname{tg}|x|=1. \quad (2)$$

Отв. $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

760. Из первого уравнения системы получаем

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

или

$$\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0.$$

Из этого уравнения находим

1) $x=-y+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$;

2) $y=2l\pi$ $(l=0, \pm 1, \ldots)$, а x — любое число;

3) $x=2m\pi$ $(m=0, \pm 1, \ldots)$, а y — любое число.

Соотношение 1) совместимо со вторым уравнением заданной системы лишь при $k=0$; действительно, из 1) следует неравенство

$$|x|+|y|\geqslant 2|k|\pi,$$

которое при условии $|x|+|y|=1$ возможно лишь в случае $k=0$.

Из системы

$$x=-y, \quad |x|+|y|=1$$

находим два решения:

$$x_1=\frac{1}{2}, \ y_1=-\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{1}{2}, \ y_2=\frac{1}{2}.$$

Рассуждая аналогично в случаях 2) и 3), находим еще две пары решений.

Отв. $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{2}$; $x_3=1$, $y_3=0$; $x_4=-1$, $y_4=0$; $x_5=0$, $y_5=1$; $x_6=0$, $y_6=-1$.

761. Из условия следует, что

$$\pi x^2 \pm 2\pi x = 2\pi k, \text{ где } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

После сокращения на π получаем

$$x^2 \pm 2x - 2k = 0,$$

откуда

$$x = \mp 1 \mp \sqrt{2k+1}.$$

Условием действительности корней является неравенство $2k+1 \geqslant 0$, или $k \geqslant 0$. Для того чтобы значения x были целыми числами, необходимо, чтобы числа $\sqrt{2k+1}$ были целыми. Так как квадратный корень из полного квадрата нечетного числа есть число нечетное, то $\sqrt{2k+1}$ — нечетное число, следовательно, числа $\mp 1 \mp \sqrt{2k+1}$ являются четными, что и требовалось доказать.

762. Перепишим заданную систему так:

$$\begin{cases} \cos \pi x \cos \pi y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \pi x + \pi y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Так как косинусы равных чисел равны, то из второго уравнения системы имеем

$$\cos(\pi x + \pi y) = \cos \frac{\pi}{4},$$

или

$$\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

Поскольку $\cos \pi x \cos \pi y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (первое уравнение системы), то из (1) следует

$$\sin \pi x \sin \pi y = 0. \quad (2)$$

Из (2) и из второго уравнения заданной системы получаем две системы

$$\begin{cases} \sin \pi x = 0, \\ x + y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} \sin \pi y = 0, \\ x + y = \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{4}$$

Из (3) следует

$$\begin{cases} \pi x = \pi k, \\ x + y = \frac{1}{4}, \end{cases} \tag{5}$$

а из (4)

$$\begin{cases} \pi y = \pi l, \\ x + y = \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{6}$$

Из системы (5) получаем

$$x = k, \; y = \frac{1 - 4k}{4},$$

а из системы (6)

$$x = \frac{1 - 4l}{4}, \quad y = l.$$

Отв. $x_1 = k, \; y_1 = \frac{1 - 4k}{4}; \quad x_2 = \frac{1 - 4l}{4}, \; y_2 = l.$

763. Перепишем заданное уравнение так:

$$\sin\left(\frac{5}{3}\pi \cos \pi x\right) = \sin \frac{\pi}{6}.$$

На основании зависимости между аргументами, синусы которых равны, имеем

$$\frac{5}{3}\pi \cos \pi x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$$

откуда

$$\cos \pi x = \frac{3}{5}k + \frac{(-1)^k}{10}. \tag{1}$$

Но поскольку $|\cos \pi x| \leqslant 1$, то k может принимать только значения -1, 0, 1, так как при всех остальных значениях k абсолютные значения выражения $\frac{3k}{5} + \frac{(-1)^k}{10}$ превышают 1.

Итак, уравнение (1) распадается на три уравнения:

1) $\cos \pi x = \frac{-7}{10}, \; x_1 = 2n \pm \frac{1}{\pi} \arccos(-0{,}7)$,

2) $\cos \pi x = \frac{1}{10}$,

3) $\cos \pi x = \frac{1}{2}$.

Отв. $x_1 = 2n \pm \frac{1}{\pi} \arccos(-0{,}7), \; x_2 = 2n \pm \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{10}$, $x_3 = 2n \pm \frac{1}{3}$.

764. Имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x\right)=\cos(\pi\sin x),$$

или, учитывая условие задачи,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x\right)=\sin(\pi\cos x).$$

Таким образом:

1) $\pi\cos x+\frac{\pi}{2}-\pi\sin x=\pi+2\pi k$, откуда $\cos x-\sin x=\frac{4k+1}{2}$.

Поделив обе части этого уравнения на $\sqrt{2}$, получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}},$$

или

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}.$$

Чтобы $\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$ было по абсолютной величине меньше единицы, из всех чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ для k можно взять только нуль. Таким образом, получаем

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$x_1=2n\pi\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

2) Вторую группу решений получим из соотношения

$$\pi\cos x-\frac{\pi}{2}+\pi\sin x=2\pi k.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}.$$

Здесь k может быть равно только нулю. Поэтому

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$x_2=2n\pi\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}.$$

Ответ. $x=2n\pi\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}\pm\frac{\pi}{4}$.

765. Перепишем уравнение так:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\pi \operatorname{ctg} x\right).$$

Пользуясь условием равенства тангенсов, получим

$$\pi \operatorname{tg} x=k\pi+\frac{\pi}{2}-\pi \operatorname{ctg} x,$$

или

$$\operatorname{tg} x=k+\frac{1}{2}-\operatorname{ctg} x. \qquad (1)$$

Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg} x=k+\frac{1}{2}-\frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x+1=0,$$

решив которое, найдем

$$\operatorname{tg} x=\frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2-16}}{4}.$$

Для вещественности $\operatorname{tg} x$ должно быть $(2k+1)^2 \geqslant 16$, т. е. $|2k+1| \geqslant 4$, следовательно, $k \neq 0$, $k \neq \pm 1$, $k \neq -2$.

Кроме того, уравнение (1), возможно, имеет корни

$$\operatorname{tg} x=\frac{2m+1}{2},$$

которых не имеет заданное, так как левая часть его в этом случае теряет смысл. Для того чтобы

$$\operatorname{tg} x=\frac{2m+1}{2}$$

был корнем уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы $(2k+1)^2-16$ было квадратом нечетного числа, т. е. чтобы $(2k+1)^2-16=(2l+1)^2$. Отсюда получаем

$$(2k+1)^2-(2l+1)^2=16.$$

Так как $(\pm 5)^2-(\pm 3)^2=16$, а при других значениях

$$(2k+1)^2-(2l-1)^2>16$$

(исключая единственный случай $(\pm 3)^2-(\pm 1)^2=8$), то $2k+1=\pm 5$ и $k_1=2$, $k_2=-3$.

Итак, $k=2$ и $k=-3$.

Если $k=2$, то $\operatorname{tg} x=\frac{5 \pm 3}{4}$, т. е. $\operatorname{tg} x_1=\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg} x_2=2$. Первое значение должно быть отброшено, потому что в этом случае левая часть заданного уравнения теряет смысл, а второе дает решение $x=n\pi+\operatorname{arctg} 2$.

Если $k=-3$, то $\operatorname{tg} x=\frac{-5 \pm 3}{4}$, т. е. $\operatorname{tg} x_3=-\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg} x_4=-2$.

И, как в предыдущем случае, первое значение должно быть отброшено, а второе дает решение $x=n\pi-\operatorname{arctg} 2$.

Отв. $n\pi \pm \operatorname{arctg} 2$,

$$n\pi+\operatorname{arctg}\frac{2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-16}}{4},$$

где $k=+3, \pm 4, \pm 5, \ldots$; $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

766. Перепишем первое уравнение системы так:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=m,$$

или

$$\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=m. \qquad (1)$$

Но так как $x+y=\alpha$, то (1) принимает вид

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(x-y)}=m,$$

откуда

$$\cos(x-y)=\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha. \qquad (2)$$

Для того чтобы уравнение (2) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$-1\leqslant\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\leqslant 1. \qquad (3)$$

При соблюдении условия (3) получаем из (2)

$$x-y=\pm\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right)+2\pi n.$$

Решая эти уравнения совместно с $x+y=\alpha$, получим

$$x=\pi n+\frac{\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right),$$

$$y=-\pi n+\frac{\alpha}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin\alpha}{m}-\cos\alpha\right).$$

Перед последними членами надо брать оба верхних знака или оба нижних знака.

767. Сложив и вычтя почленно заданные уравнения, получим

$$x+y=a(\cos t+\sin t)^3, \qquad (1)$$

$$x-y=a(\cos t-\sin t)^3. \qquad (2)$$

Из равенства (1) находим

$$\sin t+\cos t=\sqrt[3]{\frac{x+y}{a}}, \qquad (3)$$

а из равенства (2)

$$\cos t - \sin t = \sqrt[3]{\frac{x-y}{a}}. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) имеем

$$(\sin t + \cos t)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{a}\right)^2},$$

$$(\cos t - \sin t)^2 = \sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{a}\right)^2}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$2 = \sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{a}\right)^2}.$$

Итак, мы исключили t из заданной системы.

768. Перепишем заданную систему так:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \dfrac{m}{a}, \\ \sin 2x = \dfrac{n}{b}. \end{cases}$$

Имеем

$$\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2am}{a^2 + m^2}.$$

Из этого равенства и из второго уравнения заданной системы получаем

$$\frac{2am}{a^2 + m^2} = \frac{n}{b},$$

т. е. мы исключили x из данной системы.

769. Так как

$$\beta + \alpha + \beta - \alpha = 2\beta,$$

то

$$\cos[(\beta + \alpha) + (\beta - \alpha)] = \cos 2\beta.$$

Перепишем это равенство так:

$$\cos(\beta + \alpha)\cos(\beta - \alpha) - \sin(\beta + \alpha)\sin(\beta - \alpha) = \cos 2\beta. \qquad (1)$$

Поскольку $\cos(\beta + \alpha) = m$ и $\cos(\beta - \alpha) = n$, то

$$\sin(\beta + \alpha) = \pm\sqrt{1 - m^2} \quad \text{и} \quad \sin(\beta - \alpha) = \pm\sqrt{1 - n^2}.$$

Теперь равенство (1) можно представить в виде

$$mn \pm \sqrt{(1 - m^2)(1 - n^2)} = \cos 2\beta,$$

т. е. мы из данной системы исключили α.

770. Перепишем заданную систему так:

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{a}, \\ 2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{z}{b}. \end{cases}$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнений получим

$$\begin{cases} 4\cos^2\dfrac{3x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{y^2}{a^2}, \\ 4\sin^2\dfrac{3x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{z^2}{b^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Сложив уравнения системы (1), получим

$$4\cos^2\frac{x}{2}=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}. \quad (2)$$

Далее

$$\frac{y}{a}=2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\left(4\cos^3\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\cos^2\frac{x}{2}\left(4\cos^2\frac{x}{2}-3\right). \quad (3)$$

Из (2) и (3) находим

$$\frac{2y}{a}=\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-3\right).$$

Итак, мы исключили x из данной системы.

771. Для существования третьего уравнения системы необходимо, чтобы $\cos x\neq 0$ и $\cos y\neq 0$.

Поэтому первые два уравнения можно преобразовать к виду

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x=1-b, \quad (1)$$

$$(b-1)\operatorname{tg}^2 y=1-a. \quad (2)$$

Но $a\neq 1$, так как если $a=1$, то из (1) будем иметь $b=1$, что противоречит условию $a\neq b$; аналогично можно показать, что $b\neq 1$. Следовательно, (1) можно почленно разделить на (2). Разделив, получим

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Убедимся еще в том, что $a\neq 0$. Действительно, если $a=0$, то из второго уравнения получим, что $\sin y\neq 0$, а из третьего тогда получим, что $b=0$, т. е. $a=b=0$, что невозможно.

В силу этого замечания можем из третьего уравнения найти

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Если

$$\frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a},$$

то $a=b$, что невозможно.

Если же

$$\frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a},$$

то $a+b=2ab$.

Отв. $a+b=2ab$.

772. Из первых двух уравнений получаем

$$x^2\cos^2\alpha + 2xy\cos\alpha\sin\beta + y^2\sin^2\beta = a^2, \quad (1)$$

$$x^2\sin^2\beta - 2xy\cos\alpha\sin\beta + y^2\cos^2\alpha = b^2. \quad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2):

$$(x^2+y^2)(\cos^2\alpha+\sin^2\beta) = a^2+b^2. \quad (3)$$

Сложив равенство (3) с третьим уравнением заданной системы, находим

$$(x^2+y^2)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta) = a^2+b^2+2ab.$$

Поскольку выражение, стоящее во второй скобке, равно 2, то имеем

$$2(x^2+y^2) = (a+b)^2.$$

Итак, мы исключили α и β.

773. Так как $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, то заданное уравнение перепишем так:

$$\log_{\cos x}\sin x + \frac{1}{\log_{\cos x}\sin x} = 2,$$

откуда

$$(\log_{\cos x}\sin x - 1)^2 = 0,$$

или

$$\log_{\cos x}\sin x = 1.$$

Отсюда

$$\sin x = \cos x,$$

или

$$\operatorname{tg} x = 1. \quad (1)$$

Учитывая, что $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$ (поскольку $\sin x$ и $\cos x$ являются основаниями логарифмов), из уравнения (1) получаем, что

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

774. Поскольку $\sec 2x$ не существует, когда $\cos 2x=0$, то $\cos 2x\neq 0$.

Так как при $\cos 2x=1$ обе части заданного уравнения равны, то множество чисел $x=\pi k$ удовлетворяет решаемому уравнению.

Если $\cos 2x=-1$, т. е. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, то левая часть заданного уравнения принимает значение

$$(-1)^{2\cdot 0+4\cdot 0-1}=(-1)^{-1}=-1.$$

Но так как при $\cos 2x=-1$ функция $\sec 2x$ также равна -1, то множество чисел $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ удовлетворяет решаемому уравнению.

Наконец, если $\cos 2x\neq\pm 1$, то должно быть

$$2\cos 3x+4\cos x-1=-1,$$

т. е.

$$\cos 3x+2\cos x=0,$$
$$4\cos^3 x-3\cos x+2\cos x=0,$$
$$\cos x\,(4\cos^2 x-1)=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\cos x=0 \qquad (1)$$

и

$$\cos^2 x=\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) имеем $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, а из уравнения (2) находим

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k.$$

Ответ. πk, $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$.

775. Имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi\lg x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\pi\lg x)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

или

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos(\pi\lg x)+\sin\frac{\pi}{4}\sin(\pi\lg x)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

или

$$\cos\left[\pi\lg x-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда

$$\pi\lg x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,$$

следовательно,

$$\lg x_1=\frac{1}{2}+2k \qquad \text{и} \qquad x_1=10^{2k+\frac{1}{2}},$$

$$\lg x_2=2k \qquad \text{и} \qquad x_2=10^{2k}.$$

776. Последовательность $1,\ \log_2 \sin x,\ \log_2^2 \sin x,\ \ldots$ — геометрическая прогрессия, и поскольку по условию она имеет сумму, то эта прогрессия бесконечно убывающая. Имеем

$$\frac{1}{1-\log_2 \sin x}=\frac{2}{3},$$

откуда

$$\log_2 \sin x=-\frac{1}{2},$$

или

$$\sin x=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $x=(-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi k.$

777. Имеем

$$\frac{1-\cos\left(2\cdot 2^{\sqrt{-x}}\right)}{2}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\cos\left(2\cdot 2^{\sqrt{-x}}\right)=0.$$

Следовательно,

$$2\cdot 2^{\sqrt{-x}}=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$2^{\sqrt{-x}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,$$

$$x=-\log_2^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right),$$

где $k=+1, +2, +3, \ldots$

Заметим, что k не равно $0, -1, -2, \ldots$, так как при $k=0$ имеем $2^{\sqrt{-x}}=\frac{\pi}{4}<1$, а должно быть $2^{\sqrt{-x}}>1$, а при отрицательных значениях k получаем $2^{\sqrt{-x}}<0$, что также не имеет места.

Глава XVIII

НЕРАВЕНСТВА В ТРИГОНОМЕТРИИ. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ

778. Первое решение. Известно, что

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \\ \sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \\ \sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где a, b, c—стороны треугольника, а $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Из (1) следует

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

Итак, остается доказать, что $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\leqslant\frac{1}{8}$.

Действительно,

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(p-a\right)+\left(p-b\right)\right],$$

или

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{1}{2}\left(2p-a-b\right),$$

или

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{c}{2},$$

или

$$\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c}\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Аналогично

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}\leqslant\frac{1}{2} \qquad (3)$$

и

$$\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b}\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Перемножив почленно (2), (3), (4), получим

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Второе решение. Известно, что

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

или

$$\cos A=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-\frac{a^2}{2bc}.$$

Так как $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 2$, то

$$\cos A\geqslant 1-\frac{a^2}{2bc},$$

или

$$1-\cos A\leqslant\frac{a^2}{2bc},$$

или

$$2\sin^2\frac{A}{2}\leqslant\frac{a^2}{2bc},$$

или

$$\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}. \tag{1}$$

Аналогично

$$\sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}} \tag{2}$$

и

$$\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}. \tag{3}$$

Перемножив (1), (2) и (3), получим

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

что и требовалось доказать.

Третье решение. Известно, что

$$2\sqrt{ab}\leqslant a+b,\quad 2\sqrt{bc}\leqslant b+c,\quad 2\sqrt{ac}\leqslant a+c.$$

После перемножения этих неравенств получаем

$$8abc\leqslant(a+b)(b+c)(a+c). \tag{1}$$

Известно, что

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C, \tag{2}$$

где R—радиус описанной окружности.

Из (1) и (2) следует

$$8\sin A\sin B\sin C\leqslant(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin A+\sin C),$$

или

$$64 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \leqslant$$

$$\leqslant 8 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}.$$

Так как

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \quad \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}, \quad \sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2},$$

то

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A-C}{2}.$$

Но так как

$$\cos \frac{A-B}{2} \leqslant 1, \quad \cos \frac{B-C}{2} \leqslant 1, \quad \cos \frac{A-C}{2} \leqslant 1,$$

то

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant 1,$$

или

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Четвертое решение. Имеем

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \right] =$$

$$= \frac{\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}}{2} \cos \frac{A+B}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} + \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{4} \right] = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\cos \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right]^2 - \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{4} \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \cos^2 \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right]^2 \leqslant \frac{1}{8} \cos^2 \frac{A-B}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}.$$

779. Имеем

$$\cos(m+n)\cos(m-n)=\frac{1}{2}(\cos 2m+\cos 2n)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos^2 m-1+2\cos^2 n-1)=\cos^2 m-\sin^2 n\leqslant\cos^2 m.$$

780. Первое решение. Рассмотрим разность

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Но $\frac{1}{\sin\alpha}\geqslant 1$, если $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 1,\quad\text{или}\quad 1+\operatorname{ctg}\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Второе решение. Поскольку

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}},$$

то

$$1+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{\left(1-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\leqslant 0,$$

что доказывает требуемое неравенство.

781. Так как $\cos x\neq 0$, то разделим числитель и знаменатель левой части доказываемого неравенства на $\cos^3 x$.

Имеем

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg} x)}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{(1-\operatorname{tg}x)^2+2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=$$

$$=\frac{(1-\operatorname{tg}x)^2}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}+\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}x+(1-\operatorname{tg}x)=1$ — постоянная величина, то выражение $\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)$ принимает наибольшее значение при $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$.

Следовательно, наименьшее значение выражения $\frac{2}{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg} x)}$ равно 8. Но так как при $0<x<\frac{\pi}{4}$ выражение $\frac{1-\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}>0$, то

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2}{\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg} x)}>8.$$

Следовательно, и

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}>8.$$

782. Область существования левой части доказываемого неравенства определяется неравенствами

$$\alpha\neq\pi k,\quad 3\alpha\neq\pi k,\quad 2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

т. е.

$$\alpha\neq\pi k,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{3}k \quad\text{и}\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k.$$

Упростим вначале сомножители левой части доказываемого неравенства.

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

2) $3\operatorname{ctg}^2\alpha-1=\frac{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{3-4\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

$$=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

3) $\operatorname{ctg} 3\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha-1=\frac{\cos 3\alpha\sin 2\alpha-\sin 3\alpha\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}$.

В силу 1), 2) и 3) доказываемое неравенство принимает вид

$$-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}\frac{\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha\cos 2\alpha}\leqslant -1,$$

или

$$-\frac{1}{\sin^4\alpha}\leqslant -1,$$

или

$$\sin^4\alpha\leqslant 1,$$

что очевидно.

783. Применим метод математической индукции.

Если $n=2$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. В этом частном случае следует доказать неравенство

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}>2\operatorname{tg}\alpha.$$

Так как $0<\operatorname{tg}^2\alpha<1$, то это неравенство имеет место.

Далее, пусть неравенство имеет место при $n=k$, т е.

$$\operatorname{tg} k\alpha > k \operatorname{tg} \alpha \tag{1}$$

при условии

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k-1)}. \tag{2}$$

Докажем, что если имеет место (1) при условии (2), то имеет место и неравенство

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$$

при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$.

Имеем

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} k\alpha} > \frac{(k+1)\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} k\alpha}. \tag{3}$$

Так как неравенство (1) выполняется при условии (2), то оно тем более будет иметь место при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$. Но

$$0 < \operatorname{tg}\alpha < 1, \tag{4}$$

и так как $0 < k\alpha < \frac{\pi}{4}$, то

$$0 < \operatorname{tg} k\alpha < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получим

$$0 < 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} k\alpha < 1. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует $\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$, что и требовалось доказать.

784. Первое решение. Доказываемое неравенство перепишем так:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, то из (1) следует $1 \geqslant \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, что очевидно.

Так как операции обратимы, то имеет место и исходное неравенство.

Второе решение. Так как $-\pi < \alpha+\beta < \pi$, то поэтому

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$0 < \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \leqslant 1. \tag{1}$$

Кроме того,

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} < -\beta < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2) имеем

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},$$

т. е.

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}.$$

785. Имеем

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

что очевидно.

786. Очевидно, что при $\alpha=\beta$ имеет место равенство. Остается доказать, что при $\alpha\neq\beta$

$$2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta<0.$$

Так как доказываемое неравенство симметрично относительно α и β, то для определенности пусть $\beta>\alpha$.

Имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\beta<0.$$

Перепишем это неравенство так:

$$\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha}+\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}<0,\quad \frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\alpha}-\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\beta}<0,$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\beta}<0,\quad \cos\beta-\cos\alpha<0,$$

что очевидно, так как $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Так как все операции обратимые, то доказываемое неравенство имеет место.

787. Имеем

$$\sin\beta-\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Так как

$$0 < \frac{\beta+\alpha}{2} < \frac{\pi}{2},$$

то

$$\cos\frac{\beta+\alpha}{2} < 1. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\sin\beta - \sin\alpha < 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1. \qquad (3)$$

Поскольку

$$0 < \frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2},$$

то, как известно,

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Учитывая неравенства (4) и (3), имеем

$$\sin\beta - \sin\alpha < 2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 1 = \beta-\alpha,$$

или

$$\alpha - \sin\alpha < \beta - \sin\beta.$$

788. Известно, что $\beta-\alpha < \operatorname{tg}(\beta-\alpha)$, если $0 < \beta-\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Имеем

$$\beta-\alpha < \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} < \operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha-\alpha < \operatorname{tg}\beta-\beta.$$

789. Из рис. 230 видим, что площадь треугольника AOC меньше площади сектора AOC, а площадь сектора AOC меньше площади треугольника AOB.

Площадь треугольника AOC равна $\frac{R^2}{2}\sin x$, где R — радиус круга, площадь сектора AOC равна $\frac{R^2 x}{2}$, площадь треугольника AOB равна $\frac{R^2}{2}\operatorname{tg} x$.

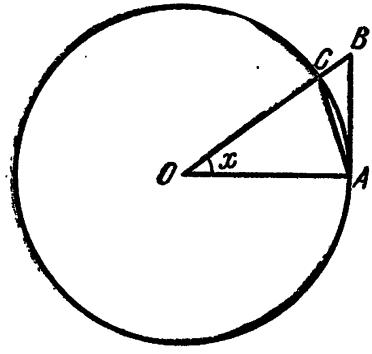

Рис. 230.

Итак, имеем

$$\frac{R^2}{2}\sin x < \frac{R^2}{2}x < \frac{R^2}{2}\operatorname{tg} x,$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

Теперь докажем второе неравенство. Поделив члены неравенства (1) на $\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x},$$

или

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

790. Известно, что $\cos x \leqslant 1$; следовательно, $2\cos x \leqslant 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$, т. е.

$$\cos x \leqslant \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Аналогично $\cos \frac{x}{2} \leqslant \cos^2 \frac{x}{4}$, $\cos \frac{x}{4} \leqslant \cos^2 \frac{x}{8}$ и т. д.

Итак,

$$\cos x \leqslant \cos^2 \frac{x}{2} \leqslant \cos^4 \frac{x}{4} \leqslant \cos^8 \frac{x}{8} \leqslant \ldots \leqslant \cos^{2^n} \left(\frac{x}{2^n}\right).$$

791. Пусть $\sin 36^\circ \sin 54^\circ = a$, $\frac{5(\sqrt{5}-1)}{4\pi} = b$.

Имеем

$$a^2 = \sin^2 36^\circ \cos^2 36^\circ = \frac{1}{4}\sin^2 72^\circ = \frac{1}{4}\cos^2 18^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{32},$$

$$b^2 = \frac{25(6-2\sqrt{5})}{16\pi^2} > \frac{25(6-2\sqrt{5})}{16 \cdot 10} = \frac{5(3-\sqrt{5})}{16} = \frac{15-5\sqrt{5}}{16}.$$

Рассмотрим разность

$$b^2 - a^2 > \frac{15-5\sqrt{5}}{16} - \frac{5+\sqrt{5}}{32} = \frac{25-11\sqrt{5}}{32} = \frac{\sqrt{625} - \sqrt{605}}{32} > 0.$$

Итак,

$$b^2 - a^2 > 0. \qquad (1)$$

Так как $a > 0$ и $b > 0$, то из (1) следует, что $a < b$, т. е.

$$\sin 36^\circ \sin 54^\circ < \frac{5(\sqrt{5}-1)}{4\pi}.$$

792. Рассмотрим разность

$$d=\cos(\sin\varphi)-\sin(\cos\varphi)=\cos(\sin\varphi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos\varphi\right)=$$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\sin\varphi-\cos\varphi-}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\cos\varphi-\sin\varphi}{2}.$$

Так как

$$|\sin\varphi\pm\cos\varphi|\leqslant\sqrt{2}\approx 1{,}414\ldots \text{ и } \frac{\pi}{2}\approx 1{,}570\ldots,$$

то

$$0{,}08<\frac{\frac{\pi}{2}-\cos\varphi\pm\sin\varphi}{2}<1{,}49,$$

а поэтому

$$\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\sin\varphi-\cos\varphi}{2}>0 \text{ и } \sin\frac{\frac{\pi}{2}-\cos\varphi-\sin\varphi}{2}>0.$$

Следовательно,

$$d>0,$$

т. е.

$$\cos(\sin\varphi)>\sin(\cos\varphi),$$

или

$$\sin(\cos\varphi)<\cos(\sin\varphi)$$

при любом φ.

793. Первое решение. Умножив числитель и знаменатель левой части неравенства на произведение $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\neq 0$, получим

$$\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha\,\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$, то $\operatorname{tg}^2\alpha>0$; $1+\cos\alpha>0$ и $1+\sin\alpha>0$, так как $\cos\alpha>-1$ и $\sin\alpha>-1$.

Следовательно, левая часть доказываемого неравенства положительна при всех допустимых значениях α.

Второе решение. Так как $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$, то из формул $\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$ и $\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$ следует, что

$$|\operatorname{tg}\alpha|>|\sin\alpha|$$

и

$$|\operatorname{ctg}\alpha|>|\cos\alpha|$$

для любых $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$.

Поэтому знак $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)$ совпадает со знаком $\operatorname{tg}\alpha$, а знак $(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$ совпадает со знаком $\operatorname{ctg}\alpha$. Но $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют одинаковые знаки, поэтому

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}>0.$$

794. Так как $\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$, то имеем

$$\sin\alpha+\sin\beta\geqslant 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$$

или

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\geqslant\frac{2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2}{\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2}}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}}}=\frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

что и требовалось доказать.

795. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta-2\sin\alpha-2\sin\beta+2\geqslant 0,$$

или

$$(\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1)+(\sin^2\beta-2\sin\beta+1)+$$

$$+(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)\geqslant 0,$$

или

$$(\sin\alpha-1)^2+(\sin\beta-1)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\geqslant 0,$$

которое очевидно. Знак равенства имеет место, когда $\sin\alpha=\sin\beta=1$, т. е. при $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где k и n — любые целые числа.

796. Обозначим стороны треугольника через a, b и c, а радиус описанной окружности через R. Для определенности пусть $\angle C$ — тупой.

Известно, что

$$c^2>a^2+b^2,\quad a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$$

Подставив значения a, b и c из последних трех равенств в первое соотношение, получим

$$4R^2\sin^2 C>4R^2\sin^2 A+4R^2\sin^2 B,$$

или

$$\sin^2 C-\sin^2 A-\sin^2 B>0,$$

или

$$1-\cos^2 C-1+\cos^2 A-1+\cos^2 B>0,$$

откуда

$$\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C>1,$$

и подавно

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1.$$

797. Пусть $0 < kx < \frac{\pi}{2}$, где k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$. При этом условии $\cos kx > 0$. Докажем, что

$$\frac{\cos(k+1)x}{\cos kx} < \frac{\cos kx}{\cos(k-1)x}\cos^2 x. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\frac{\cos(k+1)x}{\cos kx} = \frac{\cos(k+1)x\cos(k-1)x}{\cos kx\cos(k-1)x} =$$
$$= \frac{(\cos kx\cos x + \sin kx\sin x)(\cos kx\cos x - \sin kx\sin x)}{\cos kx\cos(k-1)x} =$$
$$= \frac{\cos^2 kx\cos^2 x - \sin^2 kx\sin^2 x}{\cos kx\cos(k-1)x} < \frac{\cos^2 kx\cos^2 x}{\cos kx\cos(k-1)x} =$$
$$= \frac{\cos kx}{\cos(k-1)x}\cos^2 x.$$

Так как k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$, то из неравенства (1) следует n неравенств

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} < \frac{\cos x}{1}\cos^2 x,$$
$$\frac{\cos 3x}{\cos 2x} < \frac{\cos 2x}{\cos x}\cos^2 x,$$
$$\frac{\cos 4x}{\cos 3x} < \frac{\cos 3x}{\cos 2x}\cos^2 x,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} < \frac{\cos nx}{\cos(n-1)x}\cos^2 x.$$

Перемножив почленно эти n неравенств и преобразовав полученное неравенство, находим

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} < \cos^{2n+1} x.$$

Это и требовалось доказать.

798. Имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{n\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta}{1+n\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{(n-1)\operatorname{tg}\beta}{1+n\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$\operatorname{tg}^2(\alpha-\beta) = \frac{(n-1)^2\operatorname{tg}^2\beta}{(1+n\operatorname{tg}^2\beta)^2} = \frac{(n-1)^2}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{n\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2} =$$
$$= \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\beta + n\operatorname{tg}\beta)^2} = \frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\beta - n\operatorname{tg}\beta)^2 + 4n} \leqslant \frac{(n-1)^2}{4n},$$

что доказывает требуемое неравенство.

799. Из алгебры известно, что если $a>0$ и $b>0$, то $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$. Так как $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{tg}\beta>0$, $\operatorname{tg}\gamma>0$, то имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant 2,\ \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}\geqslant 2,\ \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}\geqslant 2.$$

Сложив почленно эти три неравенства, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}\geqslant 6,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\geqslant 6,$$

что и требовалось доказать.

800. Первое решение. Имеем

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}=3=\frac{3}{1}.$$

Составим производную пропорцию

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{3+1}{3-1}=2,$$

или

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=2,$$

т. е.

$$\sin(x-y)=0,5\sin(x+y).$$

Из условия задачи следует, что $0\leqslant x-y\leqslant\frac{\pi}{2}$, поэтому $x-y$ достигает максимума вместе с $\sin(x-y)$, а $\sin(x-y)$ достигает максимума одновременно с $\sin(x+y)$.

Так как наибольшее значение $\sin(x+y)$ есть 1, то наибольшее значение $\sin(x-y)$ есть 0,5, а следовательно, наибольшее значение $x-y$ есть $\frac{\pi}{6}$, т. е. $x-y\leqslant\frac{\pi}{6}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Так как $\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}y$, то $x\geqslant y$ (учитывая ограничения для x и y).

Пусть $x=a+y$, где $a\geqslant 0$. Имеем

$$\operatorname{tg}(a+y)=3\operatorname{tg}y,$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}y}=3\operatorname{tg}y,$$

откуда

$$3\operatorname{tg}a\operatorname{tg}^2y-2\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}a=0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}y=\frac{1\pm\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2a}}{3\operatorname{tg}a}.$$

Для того чтобы $\operatorname{tg} y$ было действительным, необходимо, чтобы

$$1-3\operatorname{tg}^2 a \geqslant 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 a \leqslant \frac{1}{3}.$$

Поскольку $0 \leqslant a < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $a \leqslant \frac{\pi}{6}$. Поэтому $a = x-y \leqslant \frac{\pi}{6}$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Имеем

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2\operatorname{tg} y,$$

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = \frac{2\sin y}{\cos y},$$

$$\sin(x-y) = 2\cos x \sin y,$$

$$\sin(x-y) = \sin(x+y) - \sin(x-y),$$

$$2\sin(x-y) = \sin(x+y) \leqslant 1,$$

откуда

$$\sin(x-y) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Учитывая ограничения для x и y, получим $x-y \leqslant \frac{\pi}{6}$.

801. Первое решение. Так как $0 < A+B < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}(A+B) > 0$, следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} > 0.$$

Поскольку A и B — острые углы, то

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B > 0,$$

поэтому

$$1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B > 0,$$

или

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} < 1,$$

или

$$\sin A \sin B < \cos A \cos B,$$

т. е.

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B > 0,$$

или

$$\cos (A+B) > 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $0 < A+B < \frac{\pi}{2}$ (угол C— тупой).

802. Первое решение. Согласно условию задачи имеем

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ и } \alpha+\beta > \frac{\pi}{2}.$$

Из последнего неравенства следует, что $\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha$. Итак, имеем

$$0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Известно, что $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$, или

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1.$$

Если в левой части этого равенства вместо $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ возьмем бóльшую величину $\operatorname{tg}\beta$, то получим

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} > 1.$$

Так как $\cos\alpha > 0$ и $\cos\beta > 0$, то имеем

$$\sin\alpha \sin\beta > \cos\alpha \cos\beta,$$

или

$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta < 0,$$

т. е. $\cos(\alpha+\beta) < 0$, что очевидно, так как α и β—углы остроугольного треугольника, а потому

$$\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi.$$

Третье решение. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) < 0,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} < 0.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta > 0$, следовательно, $1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 0$ или

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1.$$

803. Имеем

$$0<\gamma<\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)<\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}.$$

Умножим обе части неравенства

$$\operatorname{tg}\gamma<\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$$

на выражение $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$, которое при данных ограничениях для α и β положительно. Имеем

$$\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)<1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha<1,$$

что и требовалось доказать.

804. Заданное неравенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha<1$ можно представить так:

$$\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)<1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta. \tag{1}$$

Так как левая часть этого неравенства положительна, то и правая

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>0. \tag{2}$$

Разделим обе части неравенства (1) на $\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$, получим

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}<\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}=\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right),$$

или

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right). \tag{3}$$

Поскольку $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, то, учитывая неравенство (2), а также условие $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, заключаем, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>0$. Поэтому из (3) следует, что

$$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}-\gamma,$$

т. е. $0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

805. На основании известных неравенств

$$x-\frac{x^3}{4}<\sin x<x,$$

имеем

$$\sin\frac{1}{n-1}>\frac{1}{n-1}-\frac{1}{4(n-1)^3},$$

$$\sin\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4(n+1)^3},$$

$$-2\sin\frac{1}{n}>-\frac{2}{n}.$$

Сложив почленно эти три неравенства, получим

$$\sin\frac{1}{n-1}+\sin\frac{1}{n+1}-2\sin\frac{1}{n}>\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{(n+1)^3}\right]=\frac{3n^2(n^2-4)+n^2+4}{2n(n^2-1)^3}>0,$$

что и требовалось доказать.

806. Если $\cos\frac{\alpha}{2}=0$, то

$$y=0<\frac{27}{256}. \qquad (1)$$

Если же $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$, то

$$y=\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}=27\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\cdot\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}.$$

Так как

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1,$$

т. е. сумма переменных сомножителей — постоянная величина, то произведение y достигает максимума, когда сомножители равны, т. е.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3},\ \text{или}\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$$

$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right.$ существует, так как $\left.\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\right)$. Перепишем исследуемую функцию в виде

$$y=\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^8\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^8\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\sec^2\frac{\alpha}{2}\right)^4}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^4}. \qquad (1)$$

Так как мы выше доказали, что y достигает максимума при $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, то

$$y_{\max}=\frac{\frac{1}{3}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{27}{256}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что имеет место неравенство

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{27}{256},$$

что и требовалось доказать.

807. Имеем

$$z=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

или

$$z=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right).$$

В правой части последнего равенства заменим $\cos\frac{x-y}{2}$ единицей, получим

$$z\leqslant 2\sin\frac{x+y}{2}\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right),$$

или

$$z\leqslant 2\cdot 2\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x+y}{4}\cdot 2\cos^2\frac{x+y}{4},$$

или

$$z\leqslant 8\sin\frac{x+y}{4}\cos^3\frac{x+y}{4}. \qquad (1)$$

Так как $0\leqslant x\leqslant\pi$ и $0\leqslant y\leqslant\pi$, то

$$0\leqslant\frac{x+y}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

а следовательно,

$$\sin\frac{x+y}{4}>0,\ \cos\frac{x+y}{4}>0. \qquad (2)$$

На основании (1) и (2) имеем

$$z^2\leqslant 64\sin^2\frac{x+y}{4}\cos^6\frac{x+y}{4},$$

или

$$z^2\leqslant 27\cdot 64\sin^2\frac{x+y}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}. \qquad (3)$$

Так как

$$\sin^2\frac{x+y}{4}+\frac{1}{3}\cdot 3\cos^2\frac{x+y}{4}=\sin^2\frac{x+y}{4}+\cos^2\frac{x+y}{4}=1,$$

т. е. сумма сомножителей правой части неравенства (3) есть величина постоянная, то z достигает максимума, когда сомножители равны между собой, т. е. когда

$$\sin^2 \frac{x+y}{4} = \frac{1}{3} \cos^2 \frac{x+y}{4},$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x+y}{4} = \frac{1}{3};$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{x+y}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда

$$\cos \frac{x+y}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \frac{x+y}{4} = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$z \leqslant 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

что и требовалось доказать.

808. Поскольку большему углу первой четверти соответствует большее значение тангенса, то имеем для любого i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_i < \operatorname{tg} \alpha_n. \tag{1}$$

Умножив обе части (1) на $\cos \alpha_i > 0$, получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_i < \sin \alpha_i < \operatorname{tg} \alpha_n \cos \alpha_i. \tag{2}$$

Придавая i все возможные значения (1, 2, 3, ..., n), получим n неравенств

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_n \cos \alpha_1,$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_2 < \sin \alpha_2 < \operatorname{tg} \alpha_n \cos \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cos \alpha_n < \sin \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_n \cos \alpha_n.$$

Сложив почленно эти n неравенств, получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n) < \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n < \operatorname{tg} \alpha_n (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n).$$

Разделив все части последнего неравенства на

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n > 0,$$

получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

809. Имеем

$$y=\frac{a(1-\cos 2x)}{2}+\frac{b\sin 2x}{2}+\frac{c(1+\cos 2x)}{2}=$$

$$=\frac{a+c}{2}+\frac{b\sin 2x}{2}+\frac{(c-a)\cos 2x}{2}=$$

$$=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}\sin 2x+\right.$$

$$\left.+\frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}\cos 2x\right).$$

Легко заметить, что если принять $\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}=\cos\varphi$, то

$$\frac{c-a}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}=\sin\varphi.$$

Итак,

$$y=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\left[\sin 2x\cos\varphi+\cos 2x\sin\varphi\right]=$$

$$=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\sin(2x+\varphi).$$

Так как

$$-1\leqslant\sin(2x+\varphi)\leqslant 1,$$

то

$$y_{\max}=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2},$$

а

$$y_{\min}=\frac{a+c}{2}-\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2},$$

т. е.

$$\frac{a+c}{2}-\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2},$$

что и требовалось доказать.

810. Первое решение. Обозначим стороны треугольника через a, b, c; противолежащие им углы — α, β, γ; радиус описанной окружности — R; радиус вписанной окружности — r, периметр — $2p$.

Очевидно, что $2p>2\pi r$, или $p>\pi r$. Умножив члены последнего неравенства на p, получим

$$p^2>\pi rp.$$

Так как площадь треугольника $S=pr$, то

$$p^2>\pi S,$$

а так как $S=\frac{abc}{4R}$, то $p^2>\pi\frac{abc}{4R}$, или

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2>\pi\cdot\frac{abc}{4R}.$$

Разделив обе части последнего неравенства на R^2, получим

$$\left(\frac{a+b+c}{2R}\right)^2 > \pi\,\frac{abc}{4R^3}.$$

Поскольку $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, то

$$\left[\frac{2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}{2R}\right]^2 > \frac{8\pi R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R^3},$$

или

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 > 2\pi\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем очевидное неравенство

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geqslant 3\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Возведем обе части этого неравенства в квадрат:

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 \geqslant 9\sqrt[3]{(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}. \qquad (1)$$

Так как $\sin\alpha\leqslant 1$, $\sin\beta\leqslant 1$, $\sin\gamma\leqslant 1$, то

$$(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2 > (\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^3. \qquad (2)$$

В силу неравенств (1) и (2) заключаем, что имеет место неравенство

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 \geqslant 9\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Поскольку $9>2\pi$, то и подавно

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2 > 2\pi\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

811. Предварительно докажем, что если $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=1. \qquad (1)$$

Так как $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\gamma=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma},$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

откуда следует (1).

Напишем четыре очевидных соотношения:

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}\leqslant\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+10,$$

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5}\leqslant\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+10,$$

$$2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}\leqslant\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+10,$$

$$(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5})^2+(\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5})^2+(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5})^2=$$
$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+15.$$

Сложив почленно эти соотношения, получим

$$(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5})^2\leqslant$$
$$\leqslant 3(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)+45=48.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5}\leqslant 4\sqrt{3},$$

что и требовалось доказать.

812. Так как

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}{2}\geqslant\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

то

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta\geqslant 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta. \quad (1)$$

Аналогично

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma \quad (2)$$

и

$$\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma. \quad (3)$$

Сложив неравенства (1), (2) и (3), получим

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$$

(см. задачу 811).

Поскольку сумма чисел $(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$, $(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)$, $(\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)$ равна 1, т. е. постоянна, то их произведение

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)$$

принимает наибольшее значение при равенстве этих сомножителей

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

т. е. когда $\alpha=\beta=\gamma$.

Так как $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$.

Итак,

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma\leqslant\operatorname{tg}^6\frac{\pi}{6}=\frac{1}{27}$$

и

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 1-\frac{1}{27}=\frac{26}{27},$$

что и требовалось доказать.

813. Первое решение. Обозначим $\cos 2x+3\sin x$ через y. Имеем

$$y=-2\sin^2 x+3\sin x+1,$$

или

$$y=-2\left[\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{16}\right].$$

Очевидно, что y достигает наименьшего значения, когда $\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2$ принимает наибольшее значение, и y достигает наибольшего значения, когда $\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2$ принимает наименьшее значение. Выражение $\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2$ принимает наименьшее значение (нуль), когда $\sin x=\frac{3}{4}$, а наибольшее $\left(\frac{49}{16}\right)$ при $\sin x=-1$, т. е.

$$0\leqslant\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2\leqslant\frac{49}{16}.$$

Итак,

$$y_{\min}=-2\left(\frac{49}{16}-\frac{17}{16}\right)=-4, \qquad y_{\max}=-2\left(0-\frac{17}{16}\right)=\frac{17}{8},$$

или

$$-4\leqslant y\leqslant 2\frac{1}{8},$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем

$$y=\cos 2x+3\sin x=-2\sin^2 x+3\sin x+1.$$

Пусть $\sin x=z$, где $-1\leqslant z\leqslant 1$, тогда

$$y=-2z^2+3z+1.$$

Если $z=\frac{-3}{2(-2)}=\frac{3}{4}$, то получаем

$$y_{\max}=-2\cdot\frac{9}{16}+3\cdot\frac{3}{4}+1=2\frac{1}{8}. \qquad (1)$$

По свойству квадратной функции

$$y=-2z^2+3z+1$$

возрастает в интервале $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ и убывает в интервале $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$. Но так как $-1\leqslant z\leqslant 1$, то

1) для значений $z<\frac{3}{4}$ наименьшее значение y получается при $z=-1$, т. е.

$$y_{\min}=-2-3+1=-4; \qquad (2)$$

2) для значений $z>\frac{3}{4}$ наименьшее значение y принимает при $z=1$, т. е.

$$y_{\min}=-2+3+1=2. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) заключаем, что

$$-4\leqslant y\leqslant 2\frac{1}{8}.$$

814. Имеем

$$y=\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{(1-\cos 2x)^3}{8}+\frac{(1+\cos 2x)^3}{8}=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}.$$

Так как наибольшее значение $\cos^2 2x$ равно 1, а наименьшее — нулю, то наибольшее значение y равно 1, а наименьшее $\frac{1}{4}$.

Отв. $1, \frac{1}{4}$.

815. Имеем

$$y=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Наименьшее значение y будет при наибольшем значении знаменателя.

Так как сумма сомножителей знаменателя постоянна

$$\operatorname{tg}^2\alpha+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=1,$$

то наибольшее значение знаменателя будет при

$$\operatorname{tg}^2\alpha=1-\operatorname{tg}^2\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{2}.$$

Итак, наименьшее значение y

$$y_{\min}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=4.$$

Отв. 4.

816. Имеем

$$y=3\operatorname{tg}^2 x\frac{1-4\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Докажем, что сумма сомножителей $3\operatorname{tg}^2 x$ и $\frac{1-4\sin^2 x}{\cos^2 x}$ есть постоянная величина.

Действительно,

$$3\operatorname{tg}^2 x+\frac{1-4\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{3\sin^2 x+1-4\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=1.$$

Следовательно, y принимает максимальное значение при

$$3\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-4\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

или

$$3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x,$$

откуда

$$\sin^2 x = \frac{1}{7} \text{ и } \cos^4 x = \frac{36}{49}.$$

Итак,

$$y_{\max} = \frac{3\cdot\frac{1}{7}\left(1-4\cdot\frac{1}{7}\right)}{\frac{36}{49}} = \frac{1}{4}.$$

Отв. $\frac{1}{4}$.

817. Докажем, что сумма $\sin^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ есть постоянная величина.

Действительно,

$$\sin^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \sin^2 x + \frac{\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}}{2} =$$

$$= \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

Поэтому функция y достигает максимума при

$$\sin^2 x = \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$$

Имеем

$$\sin^2 x = \frac{\cos 2x + \frac{1}{2}}{2},$$

или

$$\sin^2 x = \frac{3}{8},$$

а следовательно, и

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{3}{8}.$$

Итак,

$$y_{\max} = \sin^2 x \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{64}.$$

Отв. $\frac{9}{64}$.

818. Первое решение. Имеем

$$y=\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}\cdot\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}.$$

Докажем, что сумма

$$\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}+\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}$$

есть постоянная величина.

Действительно,

$$\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}+\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}=$$

$$=\cos^2 x-\frac{\cos 3x}{\cos x}+\sin^2 x+\frac{\sin 3x}{\sin x}=$$

$$=1+\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}=1+\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=3.$$

Следовательно, y достигает максимума при

$$\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x},$$

откуда $\cos 2x=0$ и $x=\frac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$y_{\max}=\frac{\left(\cos^3\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)\left(\sin^3\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{9}{8}.$$

Второе решение.

$$y=\frac{(\cos^3 x-4\cos^3 x+3\cos x)(\sin^3 x+3\sin x-4\sin^3 x)}{\sin 2x}=$$

$$=\frac{3\cos x(1-\cos^2 x)\cdot 3\sin x(1-\sin^2 x)}{\sin 2x}=\frac{9\sin^3 x\cos^3 x}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{9}{2}\sin^2 x\cos^2 x=\frac{9}{8}\sin^2 2x.$$

Так как $\frac{\pi}{3}<2x<\frac{2\pi}{3}$, то при $2x=\frac{\pi}{2}$, т. е. при $x=\frac{\pi}{4}$,

$$y_{\max}=\frac{9}{8}\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac{9}{8}.$$

Ответ. $\frac{9}{8}$.

819. Имеем

$$y=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{60^\circ+x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{60^\circ+x}{2}}=\frac{\sin(30^\circ+x)-\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ+x)+\sin 30^\circ}.$$

Поделив числитель и знаменатель на $\sin(30^\circ+x)$ и учитывая, что $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, получим

$$y=\frac{1-\frac{1}{2\sin(30^\circ+x)}}{1+\frac{1}{2\sin(30^\circ+x)}}.$$

Поскольку при возрастании положительной величины $\sin(30^\circ+x)$ числитель дроби возрастает, а знаменатель убывает, то при возрастании $\sin(30^\circ+x)$ возрастает и y.

Следовательно, наибольшее значение y будет при $\sin(30^\circ+x)=1$, т. е. при $x=60^\circ$.

Итак,

$$y_{\max}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Отв. $\frac{1}{3}$.

820. Преобразуем исследуемую функцию. Имеем

$$y=\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{3\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=3+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=3+10\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=3+5\sin\alpha.$$

Поскольку $|\sin\alpha|\leqslant 1$, то

$$-2\leqslant 3+5\sin\alpha\leqslant 8,$$

а следовательно, и

$$-2\leqslant\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}\leqslant 8.$$

Таким образом, наибольшее значение функции равно 8, а наименьшее равно -2.

Ответ. $y_{\max}=8$, $y_{\min}=-2$.

821. Из первого неравенства имеем

$$2\pi k+\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,$$

из второго

$$2\pi n-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Так как $\sin x>\frac{1}{2}$ и $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$ должны иметь место одновременно, то

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

822. Из условия следует, что

$$\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|\leqslant 1.$$

$$\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|=\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}\right|=\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1.$$

Из последнего следует, что

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}-\pi k\leqslant\frac{\pi}{4},$$

или

$$\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

что и требовалось доказать.

823. Так как при положительном основании неположительные числа не имеют логарифмов, то $\sin x>0$, и, зная, что $|\sin x|\leqslant 1$, имеем

$$0<\sin x\leqslant 1.$$

Ответ. $2\pi k<x\leqslant\pi(2k+1)$.

824. Первое решение. Известно, что

$$-1\leqslant\sin x\leqslant 1.$$

Так как на сегменте $[-1, 1]$ косинус аргумента больше нуля, то $\cos(\sin x)>0$ при любом значении x.

Второе решение. Так как

$$-\frac{\pi}{2} < \sin x < \frac{\pi}{2},$$

то $\cos(\sin x) > 0$ для всех значений x.

Отв. x—любое число.

825. Известно, что $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Но так как $\sin(\cos x) < 0$, то должно быть

$$-1 \leqslant \cos x < 0$$

Отв. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

826. Имеем

$$\sin x - a(1 - \cos x) < 0,$$

или

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2a \sin^2 \frac{x}{2} < 0. \qquad (1)$$

Так как $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, то $\sin^2 \frac{x}{2} > 0$. Разделив обе части неравенства (1) на $\sin^2 \frac{x}{2}$, получим

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} < a.$$

Отсюда

$$\operatorname{arcctg} a + k\pi < \frac{x}{2} < \pi + k\pi.$$

Отв. $2 \operatorname{arcctg} a + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi$.

827. Неравенство

$$\operatorname{tg} x (1 + \cos 2x) < \cos 2x \operatorname{tg} 2x$$

равносильно неравенству

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cos^2 x < \sin 2x,$$

или

$$2 \sin x \cos x < \sin 2x,$$

или

$$\sin 2x < \sin 2x.$$

Отв. Неравенство не имеет решений.

828. Неравенство

$$2 \sin x \sin 3x > 1$$

равносильно неравенствам

$$\cos 2x - \cos 4x - 1 > 0,$$

$$\cos 2x - 2 \cos^2 2x > 0,$$

$$\cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x < 0,$$

$$\cos 2x \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \right) < 0,$$

откуда

$$0 < \cos 2x < \frac{1}{2}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad (1)$$

и

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что

$$\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

а из (2) имеем

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < -\frac{\pi}{6} + \pi k.$$

829. Неравенство

$$\sin x + \cos x < \sqrt{2}$$

перепишем в таком виде:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) < \sqrt{2},$$

откуда

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

Так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$ для любого α, то в данном случае имеем

$$-1 \leqslant \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

Из этого неравенства следует, что

$$x - \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi,$$

или

$$x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Следовательно, данному неравенству удовлетворяют все значения x, кроме $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Ответ. $x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

830. По формуле Муавра имеем

$$(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x. \qquad (1)$$

С другой стороны, по формуле бинома Ньютона

$$(\cos x+i\sin x)^5=\cos^5 x+5i\cos^4 x\sin x-10\cos^3 x\sin^2 x-$$
$$-10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует

$$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x,$$

или

$$\sin 5x=5\sin x(1-\sin^2 x)^2-10\sin^3 x(1-\sin^2 x)+\sin^5 x,$$

или

$$\sin 5x=16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x.$$

Поэтому неравенство, заданное в условии, принимает вид

$$16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x>16\sin^5 x,$$

или

$$4\sin^3 x-\sin x<0,$$

или

$$4\sin x\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)<0,$$

или

$$\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)<0.$$

Это неравенство выполняется при

$$-1\leqslant\sin x<-\frac{1}{2} \qquad (3)$$

или

$$0<\sin x<\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Из (3) следует

$$-\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+2\pi k,$$

а из (4) имеем

$$2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$$

и

$$\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\pi+2\pi k.$$

831. Неравенство

$$\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x>1+\operatorname{tg} x$$

равносильно неравенству

$$\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x+1)-(\operatorname{tg} x+1)>0,$$

или

$$(\operatorname{tg} x+1)^2(\operatorname{tg} x-1)>0.$$

Так как $\operatorname{tg} x\neq\pm 1$, то

$$(\operatorname{tg} x+1)^2>0,$$

а значит, и $\operatorname{tg} x - 1 > 0$, или

$$\operatorname{tg} x > 1,$$

откуда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Отв. $\frac{\pi}{4}(4k+1) < x < \frac{\pi}{2}(2k+1)$.

832. Неравенство

$$\operatorname{tg} 2x < \sin x + \operatorname{tg} x$$

равносильно неравенству

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x < \sin x,$$

или

$$\frac{\sin x}{\cos 2x \cos x} - \sin x < 0,$$

или

$$\frac{\sin x (1 - \cos 2x \cos x)}{\cos 2x \cos x} < 0.$$

Так как $1 - \cos 2x \cos x > 0$, то

$$\frac{\sin x}{\cos 2x \cos x} < 0, \text{ или } \frac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x} < 0.$$

Так как

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

то

$$\frac{\operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 - \operatorname{tg}^2 x} < 0.$$

Так как $1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$, то

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} < 0, \text{ или } \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} < 0,$$

откуда $\operatorname{tg} 2x < 0$.

Следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x < k\pi,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < k\frac{\pi}{2}.$$

Отв. $\frac{\pi}{4}(2k-1) < x < \frac{\pi}{2}k$.

833. Неравенство

$$2 \sin^2 3x + \sin^2 6x < 2$$

равносильно неравенствам

$$4 \sin^2 3x \cos^2 3x - 2 \cos^2 3x < 0,$$

$$2 \cos^2 3x (2 \sin^2 3x - 1) < 0,$$

$$\cos^2 3x \cos 6x > 0. \quad (1)$$

Но $\cos^2 3x > 0$, поэтому $\cos 6x > 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k < 6x < \frac{\pi}{2}+2\pi k.$$

Отв. $-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$.

834. Из условия видно, что $x \neq \frac{\pi}{2}k$. Кроме того, заданному неравенству не удовлетворяют значения x, при которых $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$.

Таким образом,

$$x \neq \frac{\pi}{2}k \quad \text{и} \quad x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,$$

т. е. $x \neq \frac{\pi}{4}n$.

При всех остальных значениях x имеем

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} > 2.$$

По известному из алгебры неравенству, если

$$a+\frac{1}{a} > 2, \text{ то } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

В нашей задаче $a = \operatorname{tg}^2 x$. Следовательно, $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$ и $\operatorname{tg} x \neq \pm 1$.

Из последнего неравенства заключаем, что

$$x \neq \frac{\pi}{4}n.$$

Отв. $\frac{\pi}{4}k < x < \frac{\pi}{4}(k+1)$.

835. Данное неравенство равносильно неравенству

$$2\pi k < \frac{1}{x^2} < \pi(2k+1),$$

где $k = 0, +1, +2, \ldots$

Вначале рассмотрим случай, когда $k = 0$.

Имеем

$$0 < \frac{1}{x^2} < \pi,$$

откуда

$$x^2 > \frac{1}{\pi},$$

т. е.

$$x > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{или} \quad x < -\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Теперь рассмотрим случаи, когда $k=1, 2, 3, \ldots$
Имеем

1) $\frac{1}{x^2} < \pi(2k+1)$, или $x^2 > \frac{1}{\pi(2k+1)}$,

откуда

$$x > \frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}} \quad \text{и} \quad x < -\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}}.$$

2) $\frac{1}{x^2} > 2\pi k$, или $x^2 < \frac{1}{2\pi k}$,

откуда

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}.$$

Итак, для $k=1, 2, 3, \ldots$ имеем две системы неравенств:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \end{cases}$$

Из первой системы находим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi k}},$$

а из второй

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} < x < -\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}}.$$

Отв. $x > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $x < -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2\pi k}} < x < -\frac{1}{\sqrt{\pi(2k+1)}}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$

836. Преобразуем левую часть неравенства

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x = \cos^2 x \cos x \cos 3x -$$
$$- \sin^2 x \sin x \sin 3x = \frac{1}{2}\cos^2 x (\cos 4x + \cos 2x) -$$
$$- \frac{1}{2}\sin^2 x (\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2}\cos 4x (\cos^2 x + \sin^2 x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\cos 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos^2 2x =$$
$$= \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{4}(1 + \cos 4x) = \frac{1 + 3\cos 4x}{4}.$$

Итак, заданное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{1+3\cos 4x}{4} > \frac{5}{8},$$

откуда

$$\cos 4x > \frac{1}{2}.$$

Решая это неравенство, получаем

$$2\pi k - \frac{\pi}{3} < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

и

$$\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k.$$

837. Поскольку правая часть заданного неравенства неотрицательная, то $\sin x > 0$. Поэтому, возвышая в квадрат обе части неравенства, получим равносильное ему неравенство

$$\sin^2 x > 1 - \sin 2x,$$

или

$$2\sin x \cos x + \sin^2 x - 1 > 0,$$
$$2\sin x \cos x - \cos^2 x > 0,$$
$$\cos x\,(2\sin x - \cos x) > 0.$$

Решение этого неравенства сводится к решению двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \cos x < 0, \\ 2\sin x - \cos x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ 2\sin x - \cos x > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Но так как $\sin x > 0$, то система (1) противоречива. Остается одна система

$$\sin x > 0,\ \cos x > 0,\ 2\sin x - \cos x > 0,$$

или

$$\sin x > 0,\ \cos x > 0,\ \operatorname{tg} x > \frac{1}{2}.$$

Ясно, что x находится в первом квадранте, поэтому

$$2\pi k + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

838. Очевидно, что

$$\pi k + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi x}{4(x+1)} < \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &4k+1<\frac{x}{x+1}<4k+2,\\ &\frac{1}{4k+1}>\frac{x+1}{x}>\frac{1}{4k+2},\\ &\frac{1}{4k+1}>1+\frac{1}{x}>\frac{1}{4k+2},\\ &-\frac{4k}{4k+1}>\frac{1}{x}>-\frac{4k+1}{4k+2}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

откуда $-\frac{4k+1}{4k}<x<-\frac{4k+2}{4k+1}$, если $k\neq 0$.

Если же $k=0$, то из (1) имеем $x<-2$.

839. Для удобства обозначим $\operatorname{tg} x$ через t, тогда

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

Имеем

$$t>\frac{\frac{2t}{1-t^2}-2}{\frac{2t}{1-t^2}+2}=\frac{2t-2+2t^2}{2t+2-2t^2},$$

или

$$t-\frac{t-1+t^2}{t+1-t^2}>0,$$

или

$$\frac{t^3-1}{t^2-t-1}>0,$$

или

$$\frac{(t^2+t+1)(t-1)}{t^2-t-1}>0.$$

Но так как $t^2+t+1>0$ при любом значении t (поскольку корни функции t^2+t+1 мнимые), то должно быть

$$\frac{t-1}{t^2-t-1}>0. \qquad (1)$$

Так как корни квадратного трехчлена t^2-t-1 суть $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то неравенство (1) равносильно

$$(t-1)\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0,$$

откуда

$$t>\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}<t<1.$$

Но так как $t + \operatorname{tg} x$, то

$$\pi k + \operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

или

$$\pi k - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

840. Решение сводится к решению двух систем:

$$\begin{cases} \cos x - \sin x > 0, \\ \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} > 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} \cos x - \sin x < 0, \\ \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Отв. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$.

841. Умножив обе части неравенства на $\cos^2\frac{x}{2} > 0$, получим

$$4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2{,}5 \geqslant 0,$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 5 \geqslant 0,$$

$$2(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{5}{2}\right) \geqslant 0.$$

Так как $2\left(\sin x + \frac{5}{2}\right) > 0$ при любом значении x, то остается решить неравенство $\sin x - 1 \geqslant 0$, или $\sin x \geqslant 1$. Случай неравенства исключается, так как всегда $|\sin x| \leqslant 1$.

Итак, $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

842. Заданное неравенство равносильно неравенству

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

Отв. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

843. Неравенство $\sin^2 2x > \sin^2 x + \frac{1}{4}$ равносильно неравенствам

$$4\sin^2 2x > 4\sin^2 x + 1, \quad 4(1 - \cos^2 2x) > 2(1 - \cos 2x) + 1,$$
$$4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 1 < 0.$$

Пусть $\cos 2x = t$, тогда неравенство принимает вид

$$4t^2 - 2t - 1 < 0.$$

Если $f(t) = 4t^2 - 2t - 1$, то корни этой функции

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Так как при $f(t) < 0$, $t_1 < t < t_2$, то

$$\frac{1-\sqrt{5}}{4} < \cos 2x < \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

откуда:

1) $\frac{\pi}{5} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{5} + 2k\pi$, так как

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

2) $-\frac{3\pi}{5} + 2k\pi < 2x < -\frac{\pi}{5} + 2k\pi$.

Отв. $\frac{\pi}{10} + k\pi < x < \frac{3\pi}{10} + k\pi$, $k\pi - \frac{3\pi}{10} < x < -\frac{\pi}{10} + k\pi$.

844. Неравенство $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$ равносильно таким:

$$1 - \cos x < \operatorname{tg} x\,(1 - \cos x), \qquad (1 - \cos x)(1 - \operatorname{tg} x) < 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 1 - \cos x > 0, \\ 1 - \operatorname{tg} x < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \cos x < 1, \\ \operatorname{tg} x > 1. \end{cases}$$

Так как $\cos x < 1$, то $x \neq 2\pi k$, поэтому

$$\begin{cases} x \neq 2\pi k, \\ \operatorname{tg} x > 1, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Замечание. Система

$$\begin{cases} 1 - \cos x < 0, \\ 1 - \operatorname{tg} x > 0 \end{cases}$$

не имеет решений, так как $\cos x > 1$ не имеет решений.

Отв. $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

845. Неравенство $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$ равносильно таким:

$$\frac{\sin 3x \cdot \sin x + \cos 3x \cdot \cos x}{\cos 3x \cdot \cos x} < 0, \qquad \frac{\cos 2x}{\cos 4x + \cos 2x} < 0,$$

$$\frac{\cos 2x}{2\cos^2 2x + \cos 2x - 1} < 0, \qquad \frac{\cos 2x}{(\cos 2x + 1)\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)} < 0,$$

$$(\cos 2x + 1)\cos 2x\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right) < 0,$$

откуда

$$0 < \cos 2x < \frac{1}{2}.$$

Решая последнее неравенство, получаем

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ и } -\frac{\pi}{2}+2k\pi < 2x < -\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

Отв. $\frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi < x < -\frac{\pi}{6}+k\pi.$

846. Неравенство $4 \sin x \sin 3x < 1$ равносильно таким:

$$2\cos 2x - 2\cos 4x < 1,$$

$$2\cos 2x - 4\cos^2 2x + 2 - 1 < 0, \quad 4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 1 > 0.$$

Пусть $\cos 2x = t$, тогда это неравенство принимает вид $4t^2 - 2t - 1 > 0$.

Если $f(t) = 4t^2 - 2t - 1$, то корни $f(t)$ суть

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Так как $f(t) > 0$, то $t < \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ или $t > \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, т. е.

$$-1 \leqslant \cos 2x < \frac{1-\sqrt{5}}{4} \tag{1}$$

или

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \cos 2x \leqslant 1. \tag{2}$$

Так как

$$\cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ и } \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

то из (1) следует $\frac{3\pi}{5}+2\pi k < 2x < \frac{7\pi}{5}+2\pi k$, а из (2) следует $-\frac{\pi}{5}+2\pi k < 2x < \frac{\pi}{5}+2\pi k$.

Отв. $\frac{3\pi}{10}+\pi k < x < \frac{7\pi}{10}+\pi k$, $-\frac{\pi}{10}+\pi k < x < \frac{\pi}{10}+\pi k$.

847. Пусть $\operatorname{tg}^3 x = y$, $y \neq 0$, тогда имеем

$$y - \frac{1}{y} < 7\frac{7}{8}, \text{ или } \frac{y^2 - 7\frac{7}{8}y - 1}{y} < 0.$$

Умножая обе части этого неравенства на $y^2 > 0$, получаем

$$y\left(y+\frac{1}{8}\right)\left(y-8\right) < 0,$$

или

$$\left(y+\frac{1}{8}\right)\cdot y\cdot\left(y-8\right)<0.$$

Отсюда $y<-\frac{1}{8}$, или $0<y<8$, т. е.

$$\operatorname{tg}^3 x<-\frac{1}{8}, \tag{1}$$

или

$$0<\operatorname{tg}^3 x<8. \tag{2}$$

Из (1) следует $\operatorname{tg} x<-\frac{1}{2}$, откуда

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,$$

а из (2) следует $0<\operatorname{tg} x<2$, откуда

$$\pi k<x<\operatorname{arctg} 2+\pi k.$$

Отв. $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x<-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\quad \pi k<x<\operatorname{arctg} 2+\pi k.$

848. Пусть $\sin^2 x=y$, где $0\leqslant y\leqslant 1$. Тогда имеем

$$y^2-6y+4>0.$$

Корни этого трехчлена $y_{1,2}=3\pm\sqrt{5}$. Поэтому

$$y>3+\sqrt{5}, \tag{1}$$

$$y<3-\sqrt{5}. \tag{2}$$

Неравенство (1) невозможно, так как должно быть $0\leqslant y\leqslant 1$.

Учитывая (2), получим $0<\sin^2 x<3-\sqrt{5}$, откуда

$$2\sqrt{5}-5<\cos 2x<1.$$

Отв. $-\frac{1}{2}\arccos(2\sqrt{5}-5)+k\pi<x<\frac{1}{2}\arccos(2\sqrt{5}-5)+k\pi.$

849. Так как

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\quad \operatorname{tg} 3x=\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x},$$

то заданное неравенство принимает вид

$$\operatorname{tg} x+\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}>0.$$

После тождественных преобразований получим:

$$\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x-3)\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\right)}{(\operatorname{tg}^2 x-1)\left(\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{3}\right)}>0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})\left(\operatorname{tg} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg} x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg} x-1)\left(\operatorname{tg} x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\operatorname{tg} x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}>0. \tag{1}$$

Отметим на числовой оси точки (рис. 231), изображающие не допустимые значения $\operatorname{tg} x$.

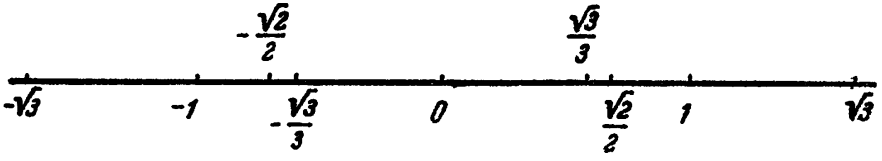

Рис. 231.

Неравенству (1) удовлетворяют:

1) $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x < -1$, откуда

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi;$$

2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда

$$-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi;$$

3) $0 < \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{tg} x < 1$, откуда $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$;

5) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$, откуда $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Отв. $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$, $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$.